第4章　実三角関数と複素数の極座標表示

分かっている人には何を今更であるが，ここでは三角関数を扱う解析学では絶対に必要な弧度法 (ラジアン, radian) の定義，三角関数と逆三角関数を復習し，その土台の上に複素数の極座標表示を定義していく。実用的には角度の単位は度 (°) を用いることも多いが，そもそも弧度法は

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1 \tag{4.1}$$

を成立させるためには欠くことの出来ないものであった。これを用いて実三角関数の導関数

$$(\sin x)' = \frac{d}{dx}\sin x \quad = \quad \cos x \tag{4.2}$$
$$(\cos x)' = \frac{d}{dx}\cos x \quad = \quad -\sin x \tag{4.3}$$

が導出できるようになったのである。

本書に置いては，以降，特に断らない限り，角度にはラジアンのみを用いるので注意されたい。

4.1　角度の単位：弧度法 (復習)

弧度法の定義を再度確認しておこう。

まず，2 次元平面における単位円 (Unit Circle) を描く。これは原点 O を中心とする半径 1 の円である。さすれば単位円の円周は 2π となる。これを 360 °，即ち 1 回転分の角度と見なすのがラジアン，弧度法の考え方である。

ちなみに，角度にも正 (プラス,+) と負 (マイナス, −) の方向がある (図 4.1)。正の実軸，即ち x 座標の正の軸を出発地点として，時計と反対方向 (counterclockwise direction) が正の回転，時計回り (clockwise direction) が負の回転である。忘れていたら思い出して頂きたい。

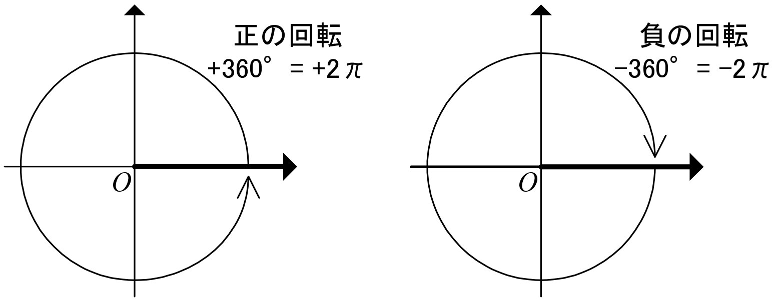

図 4.1: 正方向の 1 回転 (左) と負方向の 1 回転 (右)

従って，弧度法によって角度を設定すると，例えば

$$
\begin{aligned}
30^\circ &= \frac{\pi}{6} \\
45^\circ &= \frac{\pi}{4} \\
90^\circ &= \frac{\pi}{2} \\
180^\circ &= \pi \\
270^\circ &= \frac{3\pi}{2} \\
360^\circ &= 2\pi
\end{aligned}
$$

となる。そして，角度 θ が決まると，単位円上の点の位置も決まるので，この x 座標値 (実数部) を $\cos\theta$(コサイン), y 座標値 (虚数部) を $\sin\theta$ (サイン) と呼ぶことにする (図 4.2)。

問題

1. 225 °をラジアンに直すと？
2. 半径 r の円において，中心角が $\theta \in (0, \pi)$(ラジアン) の時，その扇形の円弧の長さは？
3. $\cos 2\pi/3$ と $\sin -3\pi/4$ の値は？

4.2　三角関数と逆三角関数 (復習)

角度が正負の符合を持ち，実数全体で定義されるものということになれば，$\sin x$ や $\cos x$ は実数全体を定義域 (Domain) とする実数関数となる。更にタンジェント

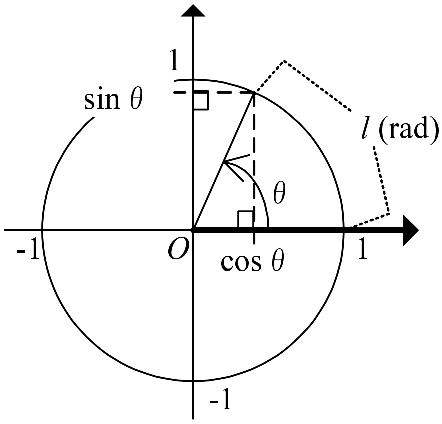

図 4.2: 孤度法と三角関数 (sine, cosine) の関係

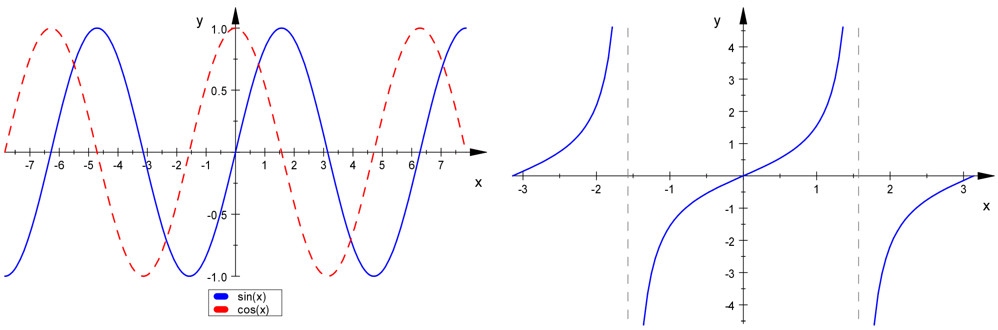

図 4.3: 三角関数のグラフ: $\sin x$(右図:実線) と $\cos x$(右図:破線), $\tan x$(左図)

(正接) を

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \tag{4.4}$$

と定義すれば，幾何学的には単位円の中心からのばした直線が，$x = 1$ という垂直な直線と交差する点の y 座標値が $\tan\theta$ ということになる。従って，任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して $\theta = (2n+1)\pi/2$ となる時は発散する。

これら 3 つの関数 ($\sin x$, $\cos x$, $\tan x$) を三角関数 (triconometric function) と呼ぶ。本書では複素数引数への拡張も行うので，特に実数の引数 (実引数) に対して実数値が対応している三角関数を実三角関数 (real trigonometric function) と呼ぶことにする。

実三角関数のグラフはそれぞれ図 4.3 のようになる。

実用的には，例えば角度が与えられた時に三角形の辺の長さを知りたい，とい

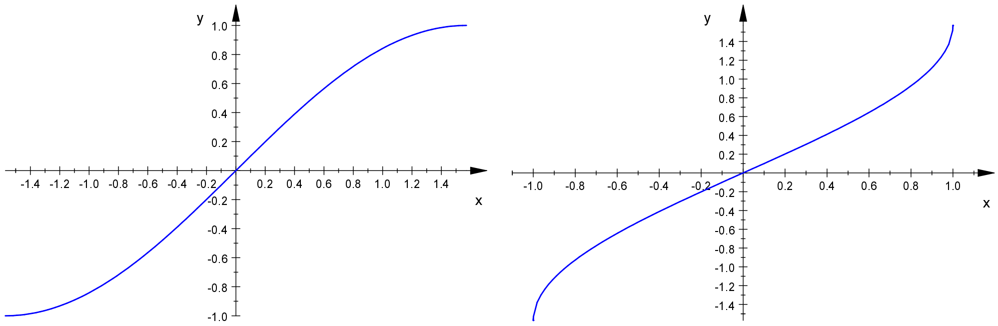

図 4.4: $\sin x$(左) と $\arcsin x$(右) のグラフ

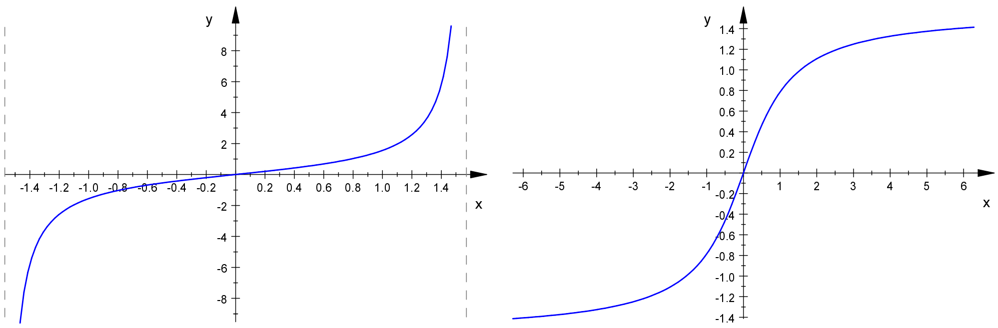

図 4.5: $\tan x$(左) と $\arctan x$(右) のグラフ

う時に三角関数は重宝するが，逆のケースも考えられる。つまり 2 辺の長さが既知の時，その 2 辺がなす角度を知りたいという場合である。数学用語で表現すると，実三角関数が $y = f(\theta)$ と表現されているものとすると，この逆関数 (inverse funtion))，即ち $\theta = f^{-1}(y)$ を求めたい，ということになる。しかし逆関数は関数 f が単射 (1-to-1 function) でなければ存在しないため，図 4.3 に示す通り，$\sin x$ と $\cos x$ の逆関数を全区間に渡って定義することは出来ない。

そこで，この二つの実三角関数については定義域を狭め，単射になる区間のみで逆関数を定義する。$\sin x$ は $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ に，$\cos x$ は $x \in [0, \pi]$ だけを考えて逆関数 $\arcsin x = \sin^{-1} x$，$\arccos x = \cos^{-1} x$ を定義する。図 4.4 に切り取られた $\sin x$ と $\arcsin x$ のグラフを示す。

$\tan x$ は $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ において実数全体を包含するので，逆関数 $\arctan x = \tan^{-1} x$ はこの区間で考えて図 4.5 のように定義される。

これら 3 つの逆関数を逆三角関数 (inverse trigonometric function) と呼ぶ。

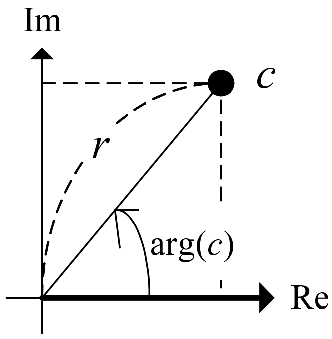

図 4.6: 複素数の極座標表示

4.3 複素数の極座標表示

以上見てきたように，弧度法を用いて実三角関数と逆三角関数を定義すると，角度と円周とが同一視でき，更に極限値 (4.1) も決まることで (4.2)，(4.3) のように導関数も与えられるようになる。これらを基盤として複素数が表現できるようになると，実数の世界では関連のありそうもなかった関数が三角関数で表現できるようになる。その第一ステップが，複素数の極座標 (polar coodinate) 表示 (極表示とも呼ぶ) である。

既に図 2.2 に示したように，複素数は実軸と虚軸を持った 2 次元平面として表現できる。従って，原点 O と正の実軸を基準とすれば，一つの複素数 c は，原点からの距離，即ち半径 r と，角度，即ち偏角 (argument)$\theta = \arg(c)$ で表現できることになる (図 4.6)。これを複素数の極座標表示と呼ぶ。

角度は $\theta \pm 2n\pi$ だけの位相 (phase) のずれがあっても判断できないため，一意に決めたい時には 2π 以内に制限をかける必要がある。

そうすると，非零の $c \in \mathbb{C}$ が与えられた時の半径 r は c の絶対値 $|c|$ となり，偏角 $\arg(c)$ は arctan を用いて表現することが出来る。但し，図 4.5 に示した通り，$-\pi/2 < \arctan x < -\pi/2$ なので，

$$\arg(c) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & (\mathrm{Re}(c) = 0, \mathrm{Im}(c) > 0) \\ \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(c)}{\mathrm{Re}(c)}\right) + \pi & (\mathrm{Re}(c) < 0,\ \mathrm{Im}(c) > 0) \\ \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(c)}{\mathrm{Re}(c)}\right) - \pi & (\mathrm{Re}(c) < 0,\ \mathrm{Im}(c) < 0) \\ -\frac{\pi}{2} & (\mathrm{Re}(c) = 0, \mathrm{Im}(c) < 0) \\ \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(c)}{\mathrm{Re}(c)}\right) & (\text{上記以外}) \end{cases} \tag{4.5}$$

として決めることが出来る。このような値を返す関数として，atan2 関数というも

のが標準ライブラリや表計算ソフトウェアには用意されている。

従って極座標表示 $(r, \theta) = (|c|, \arg(c))$ が与えられた時の複素数の標準形は，三角関数の定義 (図 4.2) によって

$$c = r\left(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta\right) \tag{4.6}$$

となることが分かる。

4.4　三角関数の加法定理 (復習) と極座標表示

角度の和，差を取った時，そこに成立する三角関数の関係を表現したものが加法定理である。角度 $\theta_c, \theta_d \in \mathbb{R}$ が与えられた時，$\theta_c \pm \theta_d$ に対して各三角関数は

$$\cos(\theta_c \pm \theta_d) = \cos\theta_c \cdot \cos\theta_d \mp \sin\theta_c \cdot \sin\theta_d \tag{4.7}$$

$$\sin(\theta_c \pm \theta_d) = \sin\theta_c \cdot \cos\theta_d \pm \cos\theta_c \cdot \sin\theta_d \tag{4.8}$$

$$\tan(\theta_c \pm \theta_d) = \frac{\tan\theta_c \pm \tan\theta_d}{1 \mp \tan\theta_c \cdot \tan\theta_d} \tag{4.9}$$

となる。これから極座標表示との関連を見ていくために，もう一度この加法定理が幾何学的にどう成り立っていたかを，図 4.7 を見ながら復習して頂きたい。

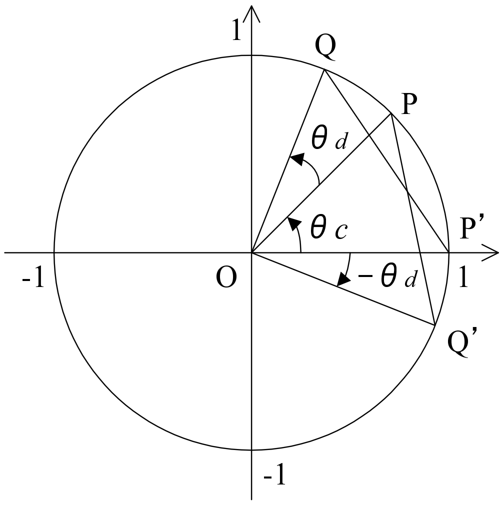

図 4.7: 加法定理の幾何学的証明

今，簡単のために $0 \leq \theta_c, \theta_d < \pi$ とする。この時，図 4.7 のうち $\triangle$OQP′ と $\triangle$OQ′P は合同となる。従って $\mathrm{P'Q}^2 = \mathrm{PQ'}^2$ が成立するので，この等式より

$$(1 - \cos(\theta_c + \theta_d))^2 + \sin^2(\theta_c + \theta_d) = \{\cos\theta_c - \cos(-\theta_d)\}^2 + \{\sin\theta_c - \sin(-\theta_d)\}^2$$

となる。これを整理すると (4.7) のうち $\theta_c + \theta_d$ についての等式が導出される。

この図を Gauss 平面と見立てると，二つの複素数 c, d の積を，極座標表示した時の偏角を表わすものとなる。

今，$c, d \in \mathbb{C}$ を極座標表示して

$$\begin{aligned} c &= r_c\left(\cos\theta_c + \sqrt{-1}\sin\theta_c\right) \\ d &= r_d\left(\cos\theta_d + \sqrt{-1}\sin\theta_d\right) \end{aligned}$$

と表現できたとする。この時，積 cd を計算すると，

$$\begin{aligned} cd = r_c r_d \{&(\cos\theta_c \cdot \cos\theta_d - \sin\theta_c \cdot \sin\theta_d) \\ = &+ \sqrt{-1}\,(\sin\theta_c \cdot \cos\theta_d + \cos\theta_c \cdot \sin\theta_d)\} \end{aligned}$$

となるが，このカッコ内 () は加法定理を使ってまとめられるので

$$= r_c r_d \left\{\cos(\theta_c + \theta_d) + \sqrt{-1}\sin(\theta_c + \theta_d)\right\}$$

となる。つまり，偏角だけを取り出してみると，ちょうど図 4.7 のように Gauss 平面上では操作をしていることになる。

同様にして，$d \neq 0$ の時，複素数の商 c/d は

$$c/d = \frac{r_c}{r_d}\left\{\cos(\theta_c - \theta_d) + \sqrt{-1}\sin(\theta_c - \theta_d)\right\}$$

となる。

以上まとめて，$cd, c/d$ を極座標表示で考えると

$$|cd| = |c||d| \tag{4.10}$$

$$|c/d| = |c|/|d| \tag{4.11}$$

$$\arg(cd) = \arg(c) + \arg(d) \pmod{2\pi} \tag{4.12}$$

$$\arg(c/d) = \arg(c) - \arg(d) \pmod{2\pi} \tag{4.13}$$

となる。ここで $a = b(\mathrm{mod}\ 2\pi)$ は $a = b \pm 2n\pi$ $(n \in \mathbb{N}, 0 \leq |b| < 2\pi)$ を意味する。

練習問題

1. もし h が角度の単位として ${}^\circ$(度) を用いている時，極限値

$$\lim_{h \to 0^\circ} \frac{\sin h}{h}$$

は値を持つか？　持つとすればその値を求めよ。

2. $\arccos x$ のグラフを描け。

3. 次の複素数の極座標表示を求めよ。

   (a) $-3 + 4\sqrt{-1}$
   (b) $\sqrt{-2}$
   (c) $\sin \pi/4 + \sqrt{-1} \cos \pi/6$

4. 上記の複素数の極座標表示を求める C++プログラム (print_polar.cpp) を作れ。