第5章　指数関数とEulerの公式・de Moivreの公式，複素数の$1/n$乗

本章では複素解析の第一歩となる指数関数の複素数への拡張 (複素拡張) を行う。前章で示した極座標表示は，この複素拡張された指数関数により表現することができる。実数関数としては何ら関連があるとは思われなかった三角関数との関連も，この複素拡張によって得られ，Euler の公式，de Moivre の公式が導かれるのである。従って，本章の内容は後々まで参照されるものが多くなる。分からなくなったら何度でもここに立ち戻って頂きたい。

5.1　Taylorの定理と初等関数のMaclaurin展開 (復習)

実数関数 $f(x)$ が，ある閉区間 $[a,b]$ で定義され，解区間 (a,b) において無限回微分可能であるとき，f は $x=a$ の周りで無限級数展開でき

$$f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{f^{(i)}(a)(x-a)^i}{i!} \tag{5.1}$$

と表現できる。これが Taylor 展開と呼ばれるものであった。特に $a=0$ の場合は

$$f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{f^{(i)}(0)x^i}{i!} \tag{5.2}$$

のように簡単になる。これを Maclaurin 展開と呼び，我々が普通に使ってきた初等関数 (多項式関数，三角関数，指数・対数関数など) は Maclaurin 展開が可能な

ものが殆どである。具体的には次のように表現できる。

$$\exp(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \tag{5.3}$$

$$\cos x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \cdot x^{2i}}{(2i)!} \tag{5.4}$$

$$\sin x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \cdot x^{2i+1}}{(2i+1)!} \tag{5.5}$$

$$\log(1+x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \cdot x^i}{i} \tag{5.6}$$

この無限級数表現を用いて，初等関数の複素拡張を行うことにしよう。

5.2　Euler の公式と de Moivre の公式

指数関数の Maclaurin 展開式 (5.3) により，θ を実数に取り，x を純虚数，即ち $x = \theta\sqrt{-1}$ に限定すると，この展開式はちょうど偶数次数の実数部と奇数次数の虚数部に分解でき

$$\begin{aligned}\exp\left(\theta\sqrt{-1}\right) &= 1 + \theta\sqrt{-1} - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^3}{3!}\sqrt{-1} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \theta^{2j}}{(2j!)} + \sqrt{-1}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k+1}}{(2k+1)!}\end{aligned}$$

となる。すると，ちょうど偶数次部分は $\cos\theta$ の，奇数次部分は $\sin\theta$ の Maclanrin 展開式 (5.4)，(5.5) となるので，結局 $\exp(\theta\sqrt{-1})$ は次の形で表現できることになる。

$$\exp(\theta\sqrt{-1}) = \cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta \tag{5.7}$$

これを Euler の公式と呼ぶ。これで純虚数を引数とする指数関数へ拡張ができたことになり，同時に，複素数の極座標表示 (4.6) もこの指数関数を用いて表現できるようになる。即ち，$c = r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta) \in \mathbb{C}$ に対して，

$$c = r\exp\left(\theta\sqrt{-1}\right) \tag{5.8}$$

である。

複素数の積は，極座標表示を用いると，半径の積 (4.10) と偏角の和 (4.12) で表現できるので，純虚数を引数とする指数関数の n 乗 ($n \in \mathbb{N}$) は

$$\exp(n\theta\sqrt{-1}) = \left(\exp(\theta\sqrt{-1})\right)^n = \cos n\theta + \sqrt{-1}\sin n\theta \tag{5.9}$$

となる。これを de Moivre の公式と呼ぶ。

5.3 1 の n 乗根 ω_n と複素数の $1/n$ 乗

ある $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$z^n - 1 = 0$$

を満足する複素数解 z を 1 の n 乗根 (nth roots) と呼び，そのうち一つを ω_n と書く。既に見てきたように，de Moivre の公式から ω_n は

$$\omega_n = \exp\left(\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}\right) \tag{5.10}$$

と置くと，$\omega_n^0 = 1, \omega_n^1, \dots, \omega_n^{n-1}$ は全て 1 の n 乗根となる。

例えば $n = 3$ の時は図 5.1 のような，Gauss 平面上の 3 点

$$\begin{aligned}
\omega_3^0 &= 1 \\
\omega_3 &= \exp\left(\frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}\right) \\
\omega_3^2 &= \exp\left(\frac{4\pi}{3}\sqrt{-1}\right) \\
\omega_3^3 &= \exp\left(\frac{6\pi}{3}\sqrt{-1}\right) = \omega_3^0 = 1
\end{aligned}$$

となる。

5.4 複素数の平方根と分枝

1 の $1/n$ 乗根同様，一般の複素数 $c = r\exp(\theta\sqrt{-1})$ に対しても $1/n$ 乗根が定義できる。この時は半径 r が実数の $1/n$ 乗，偏角 θ が $1/n$ 倍された

$$r^{1/n}\exp\left(\frac{\theta\sqrt{-1}}{n}\right)$$

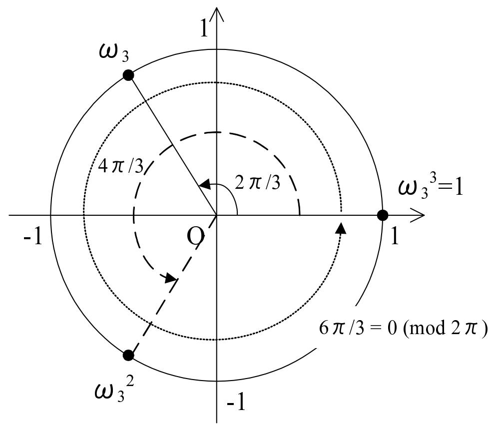

図 5.1: 1 の 3 乗根の位置:$\omega_3^0 = 1, \omega_3^1, \omega_3^2$

を基準として，これの偏角 θ に $+2\pi/n, +2\cdot 2\pi/n, ..., +(n-1)\cdot 2\pi/n$ したものが全て c の $1/n$ 乗根となる。つまり c の $1/n$ 乗根は

$$r^{1/n} \exp\left(\frac{(\theta + 2\pi k)\sqrt{-1}}{n}\right) \ (k = 0, 2, ..., n-1)$$

である。

例えば，$n = 2$ の時は図 5.2 のような位置関係 (2 つの円周上の黒点) となる。

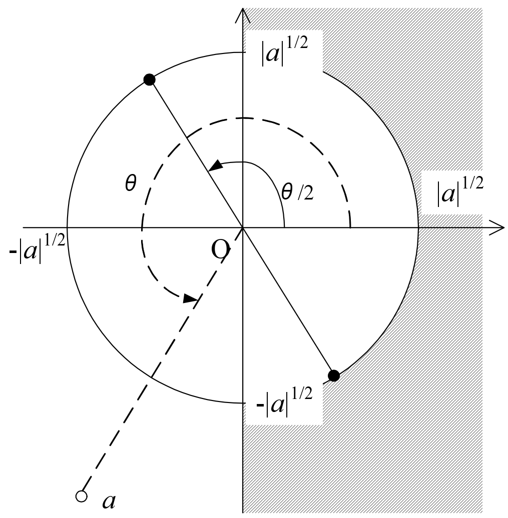

図 5.2: 複素数の 1/2 の位置と平方根 $\sqrt{\ }$ の定義

但し，本来の意味での「関数」として，平方根や $1/n$ 乗根を位置づけようとすると，このような 2 ないし n 個の値を取りうるような多値関数では困る。

そこで，実用的には Gauss 平面を負の実軸で分け (図 5.3)，偏角がこの範囲に収まるように多値関数の値の候補を一つに絞る。

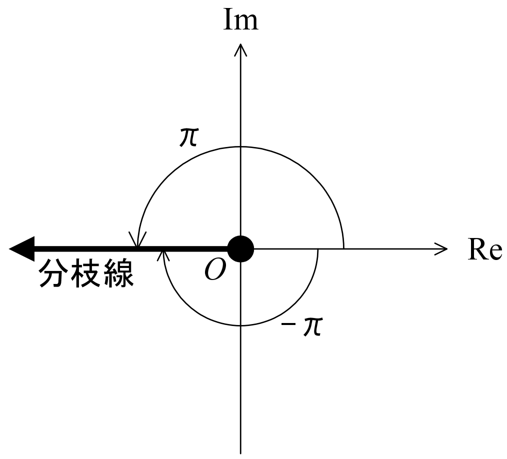

図 5.3: 分枝の境界線

平方根の場合も，関数としては二つのうち片方に絞る必要がある訳だが，実数の平方根関数との齟齬が生じてもマズい。そこで実数の場合は正の平方根を関数の値として定義していたのをそのまま踏襲し，複素数の平方根「関数」も，正の実部 (図 5.2 の右半面のアミガケ部分) を持つものを関数の値として取ることにする。C++の標準ライブラリにおける sqrt 関数 (P.23) の返り値もこのように規定されている。本書では以降，任意の複素数 z に対する平方根 $\sqrt{z}$ を

$$\mathrm{Re}(\sqrt{z}) \geq 0 \tag{5.11}$$

となるものを意味することにする。さすれば $z \in \mathbb{R}$ の場合と整合性が取れ，

$$\pm\sqrt{z}$$

という表記も任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して 2 乗すると z になる数として，そのまま用いることができる。

5.5　複素指数関数

以上，述べてきたことを総合すると，指数関数の複素拡張は次のように定義すれば良いことが分かる。

$$\exp(z) = \exp(\mathrm{Re}(z)) \cdot \left(\cos(\mathrm{Im}(z)) + \sqrt{-1}\sin(\mathrm{Im}(z))\right) \tag{5.12}$$

指数法則

$$\begin{aligned} \exp(z_1 + z_2) &= \exp(z_1)\exp(z_2) \\ \exp(z_1 - z_2) &= \exp(z_1)/\exp(z_2) \end{aligned} \tag{5.13}$$

は，任意の $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ に対して成立することは，今まで述べてきたことから示すことができる。

但し，複素指数関数は，単調増加関数であった実数関数とは異なり，$2\pi\sqrt{-1}$ の周期関数となる。

$$\exp\left(z + 2\pi\sqrt{-1}\right) = \exp(z) \tag{5.14}$$

練習問題

1. (5.3) から (5.6) 式までの Maclaurin 展開がこのように与えられることを説明せよ。

2. 任意の定数 $\alpha \in \mathbb{R}$ と変数 $x \in \mathbb{R}$ に対して，$(1+x)^\alpha$ は

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha \cdot (\alpha-1)\cdots(\alpha-i+1)\cdot x^i}{i!}$$

と展開できることを証明せよ。

3. 次の値を全て求めよ (という時には複素数の標準形 (2.1) で値を表示すること)。

   (a) $\exp\left(\frac{5\pi\sqrt{-1}}{4}\right)$

   (b) $\sqrt{4 - 9\sqrt{-1}}$

   (c) $\exp\left(-3 + 2\sqrt{-1}\right)$

4. 指数法則 (5.13) が成立することを説明せよ。

5. 指数関数が $\pi\sqrt{-1}$ の周期性を持つ理由を説明せよ。

6. 1 の n 乗根 $1, \omega_n, \omega_n^2, ..., \omega_n^{n-1}$ をすべて計算して表示する C++プログラム"show_nth_roots.cpp"を作り，$n = 5, 7$ の時の値を 5 桁程度の浮動小数点数 (有限桁の小数表記) で求めよ。