第6章　複素数の三角関数，対数関数と複素数の複素べき乗

前章において，指数関数の複素拡張を行った。本章ではそれに基づき，三角関数と対数関数の複素拡張を行い，最後に複素数の複素数べき乗の定義を行う。

6.1　複素数の三角関数と双曲線関数

複素三角関数は，exp(z) を用いて次のように定義できる。

$$\sin z = \frac{\exp\left(z\sqrt{-1}\right) - \exp\left(-z\sqrt{-1}\right)}{2\sqrt{-1}} \tag{6.1}$$

$$\cos z = \frac{\exp\left(z\sqrt{-1}\right) + \exp\left(-z\sqrt{-1}\right)}{2} \tag{6.2}$$

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \tag{6.3}$$

これらの三角関数は，実数同様の性質，例えば加法定理等はすべて成立する。

さて，実数関数としての双曲線関数 (Hyperbolic functions) は次のように定義されていた。

$$\sinh x = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} \tag{6.4}$$

$$\cosh x = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2} \tag{6.5}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{\exp(x) + \exp(-x)} \tag{6.6}$$

これをそのまま $x \in \mathbb{R} \to z \in \mathbb{C}$ に置き換えたものが複素双曲線関数である。故

に，三角関数 (6.1)〜(6.3) との間には次のような関係が生じる。

$$\sinh z = -\sqrt{-1}\sin\left(z\sqrt{-1}\right) \tag{6.7}$$

$$\cosh z = \cos\left(z\sqrt{-1}\right) \tag{6.8}$$

$$\tanh z = -\sqrt{-1}\tan\left(z\sqrt{-1}\right) \tag{6.9}$$

6.2　べき乗と対数の関係

実数関数としての自然対数 (関数)$\log x = \ln x$ は，実数の指数関数の逆関数として定義されたものであるので，

$$\log x = y \longleftrightarrow \exp(y) = x$$

という関係にあった。複素数への拡張も，この性質を保つように行いたい。

従って，複素数 z の指数表示が

$$z = r\exp(\theta\sqrt{-1})$$

で与えられる時，複素対数は

$$\log z = \log r + \theta\sqrt{-1} \tag{6.10}$$

として定義する。これによって，$\exp(z)= \exp(\mathrm{Re}(z)))(\cos(\mathrm{Im}(z)) + \sqrt{-1}\sin(\mathrm{Im}(z)))$ から

$$\log(\exp(z)) = \log(\exp(\mathrm{Re}(z))) + \mathrm{Im}(z)\sqrt{-1} = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z)\sqrt{-1} = z$$

という性質が保たれる。

但し，$\Theta = \theta + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ となる Θ であれば

$$\exp\left(\mathrm{Re}(z) + \Theta\sqrt{-1}\right) = \exp(z)$$

となってしまうので，

$$\log\left(\mathrm{Re}(z) + \Theta\sqrt{-1}\right) = \mathrm{Re}(z) + (\mathrm{Im}(z) + 2k\pi)\sqrt{-1}$$

となり，複素対数関数は $1/n$ 乗同様，多値関数となってしまう。そのため分枝を，これも $1/n$ 乗と同じく，負の実軸 (図 5.3) に取り，これで通常の意味での関数とする。

これにより，対数法則

$$\begin{aligned} \log(z_1 z_2) &= \log z_1 + \log z_2 & (6.11) \\ \log(z_1/z_2) &= \log z_1 - \log z_2 & (6.12) \\ & & (6.13) \end{aligned}$$

や，底の変換に基づく任意の実数の底 $a > 0$ に対して

$$\log_a z = \frac{\log z}{\log a} \tag{6.14}$$

が定義でき，実数の対数と同じ性質を持たせることができる。

さて，複素対数関数が定義できたことにより，任意の複素数の複素数乗 a^z も実数乗と同じようにして定義できる。即ち

$$a^z = \exp\left(z \log a\right) \tag{6.15}$$

となる。

6.3 複素数の逆三角関数

複素数の逆三角関数 $\arccos\ z$, $\arcsin\ z$, $\arctan\ z$ は対数を用いて次のように表現できる。

$$\begin{aligned} \arcsin\ z &= -\sqrt{-1}\cdot\log\left(\sqrt{1-z^2}+z\sqrt{-1}\right) & (6.16) \\ \arccos\ z &= -\sqrt{-1}\cdot\log\left(z+\sqrt{-1}\cdot\sqrt{1-z^2}\right) & (6.17) \\ \arctan\ z &= \frac{\sqrt{-1}}{2}\log\left(\frac{\sqrt{-1}+z}{\sqrt{-1}-z}\right) & (6.18) \end{aligned}$$

練習問題

1. $\tan z$ を $\exp(z)$ のみを用いて表現せよ。
2. 複素三角関数 (6.1), (6.2), (6.3) についても任意の複素数 $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ に対し，加法定理 ((4.7), (4.8), (4.9))

$$\begin{aligned} \cos(z_1 \pm z_2) &= \cos z_1 \cdot \cos z_2 \mp \sin z_1 \cdot \sin z_2 & (6.19) \\ \sin(z_1 \pm z_2) &= \sin z_1 \cdot \cos z_2 \pm \cos z_1 \cdot \sin z_2 & (6.20) \\ \tan(z_1 \pm z_2) &= \frac{\tan z_1 \pm \tan z_2}{1 \mp \tan z_1 \cdot \tan z_2} & (6.21) \end{aligned}$$