

表計算ソフトを使って  
方程式を解いてみよう  
～大学3年生講義「数値解析1」より～

静岡理工科大学

情報学部 コンピュータシステム学科

幸谷 智紀(こうや とものり)

高性能計算研究室 <https://cs-tklab.na-inet.jp/>

# 概要

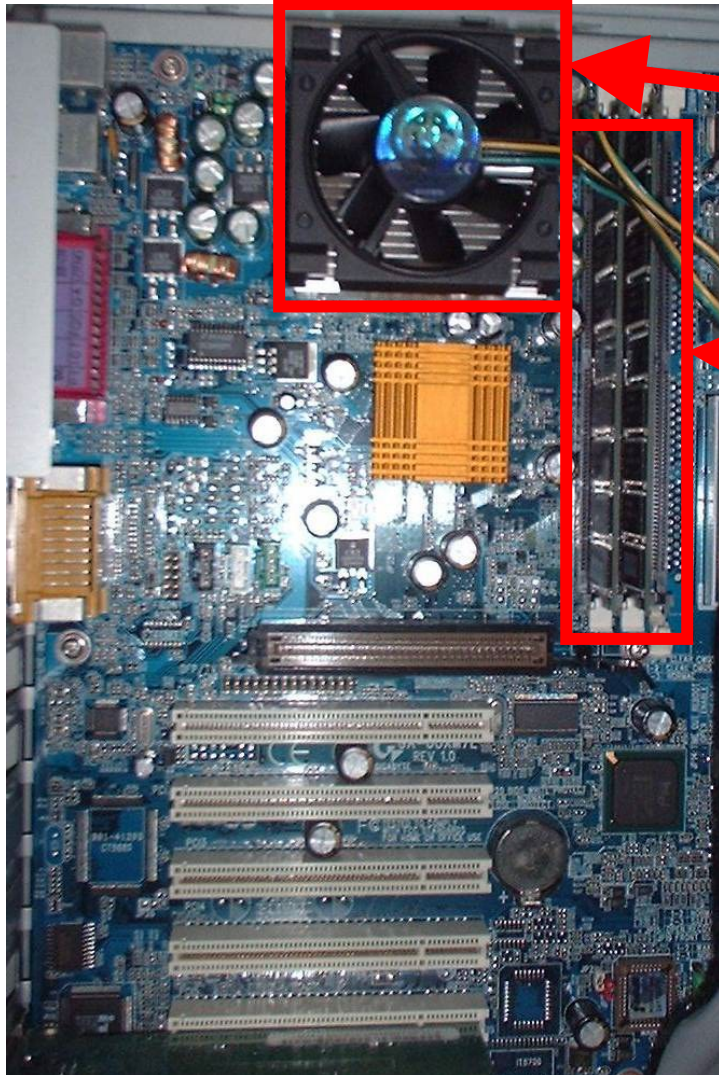
- 「数値解析1」の内容
- 表計算ソフトとは？
- 方程式はなぜ必要か？
- 方程式を解く方法
- グラフを使う方法
- 中点法
- レギュラ・ファルシ法
- 課題

# 「数値解析1」の内容

## 講義内容説明文(シラバス)より抜粋

講義科目名称： 数値解析 1 C5-D51-30		授業コード： 72056	
英文科目名称： Numerical Analysis 1			
開講期間	配当年	単位数	科目必選区分
3年前期	3	2	選択（教職「数学」は選択）
担当教員			
幸谷 智紀			
添付ファイル			
講義概要	微分積分，線型代数で学んだ基礎数学知識を土台に，コンピューターにおける浮動小数点数を用いた「数値計算」の初歩的な知識を習得することを目的とする。高性能な計算が実行できるソフトウェアを通じて最先端の科学技術計算の土台についての理解も深める。		
授業計画	1	数値計算とは？ 数値計算とは何か，どのような環境で実現するのかを，数値積分を例に解説 AL①② 準備学習：教科書・第1章の内容を理解すること。必要に応じて微分積分，線形代数の復習を行うこと。 課題：第1章の練習問題および演習問題を解く。	

# コンピュータのしくみ(1/2)



多くの処理(計算)はここで行われる

CPU

データを蓄える場所

メインメモリ  
RAM

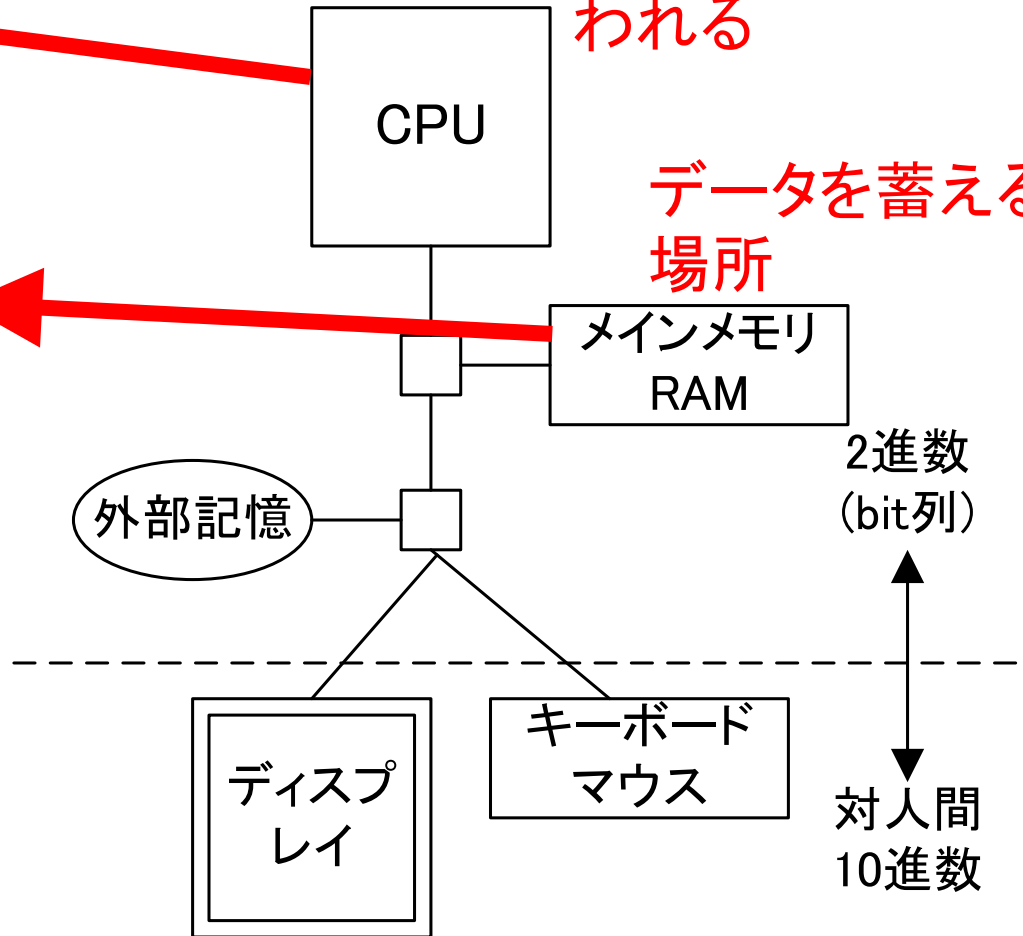
外部記憶

2進数  
(bit列)

ディスプレイ

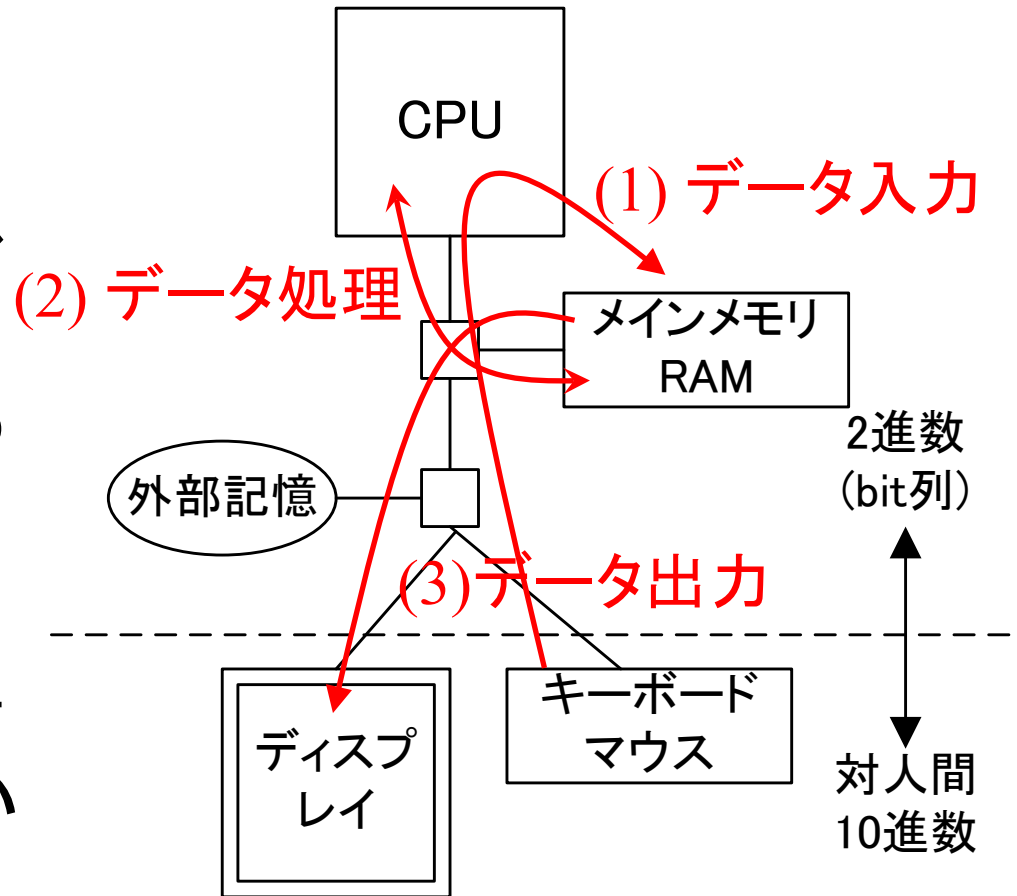
キーボード  
マウス

対人間  
10進数



# コンピュータのしくみ(2/2)

- 2進回路の組み合わせ → 単純な計算しか出来ない
- 四則演算の組み合わせで全てを表現する
- 但し、沢山繰り返しても良い(一回辺りの計算時間はとても小さいから)



# 「数値解析」とは？

## 第 1 章

# 数値計算と数学ソフトウェア

そして石井は、尾見半左右の文章の中の数値解析という言葉指着して、「池田さんは、数値解析の本をやたらに持っていて、数値解析に尋常ならざる熱の入れ方だった」と語った。

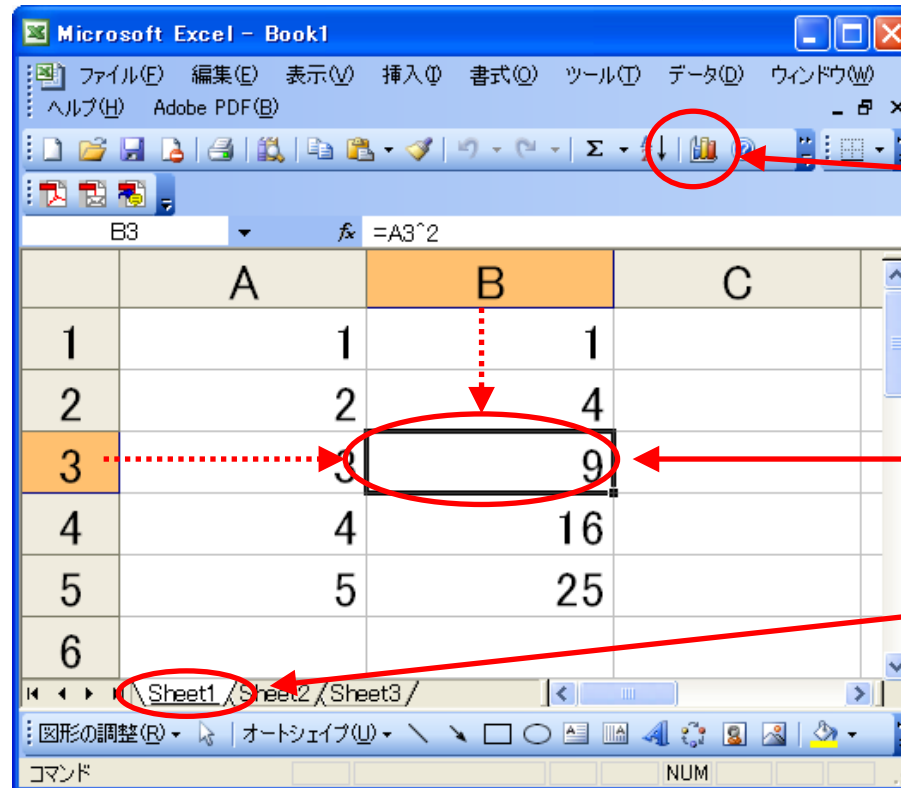
だが、数値解析と突然いわれても私にはさっぱり理解出来ず、あらためて数値解析について問いなおさねばならなかった。

「数値解析というのは、要するに、すべてを近似値に計算するのです。微分とか積分といった高級なものを使わないで、全部加減乗除になおしてやってしまう。あるいは足し算、引き算でやってしまうわけです」

田原総一郎「日本コンピュータの黎明」(文藝春秋)

# 表計算ソフトとは？(1/3)

- 例えばExcel(エクセル)が有名。
- セル(cell)にデータを入力し, 計算したりグラフを描いたりできる。
- 一つのファイルに複数のシート(表)を作ることができる。



グラフウィザード

B3セル

シート名

# 表計算ソフトとは？(2/3)

計算は、半角の「=」に続いて計算式を入力。

計算式・・・セルの指定と加減乗除(+, -, \*, /),  
累乗(^)・・・等の組み合わせで表現する。

[肩慣らし] A列: 1~5  
まで入力 B列: A列の値  
の2乗を自動  
計算 C列: A列と  
B列の相加  
平均を自動  
計算

	A	B	C
1	1	1	1
2	2	4	3
3	3	9	6
4	4	16	10
5	5	25	15



# 表計算ソフトとは？(3/3)

## [計算方法]

- A列に1から5までの自然数を入力。
- B1にA1の2乗を計算→「=A1^2」
- C1にA1とB1の値の相加平均を計算→「=(A1 + B1) / 2」。
- B1, C1を選択し, 右下の黒ポッチをドラッグして5行分コピーする。

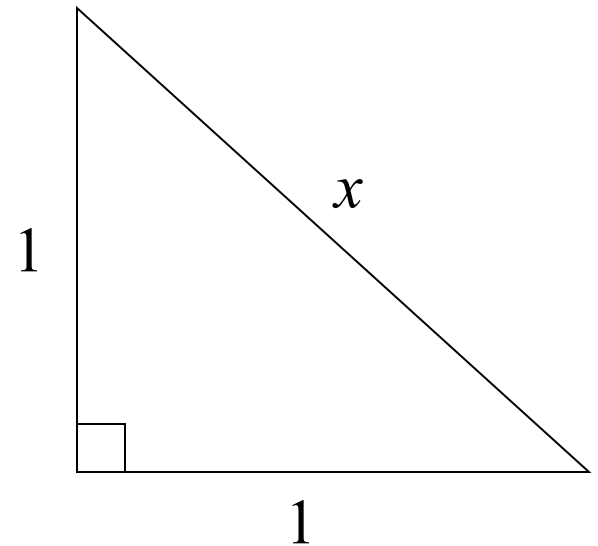
# 方程式はなぜ必要か？(1/2)

問題「直角をなす一辺の長さが1メートルの，直角二等辺三角形の斜辺の長さは何メートルか？」

$\sqrt{2}$  メートル，では実用上困る。  
小数で表現すると？  
(電卓を使うとよい)

$$\sqrt{2} = \underline{\hspace{2cm}}$$

何故分かるか？



# 方程式はなぜ必要か？(2/2)

## ピタゴラスの定理と方程式

斜辺の長さ  $x$  メートルとすれば

$$x^2 = 1^2 + 1^2$$

より

$$x^2 = 2$$

この方程式を  $x$  について解き, その正の解を求めればよい。

以下では, 全ての方程式を  $f(x) = 0$  と表現する。

上記の方程式も

$$x^2 - 2 = 0$$

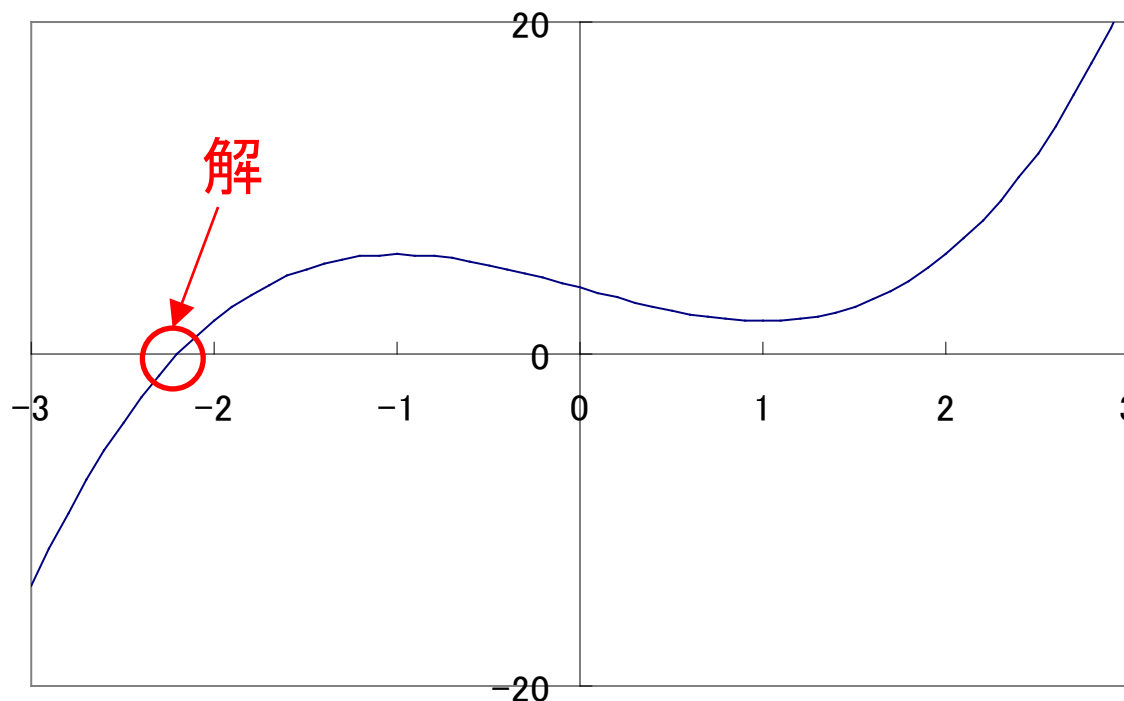
と変形して扱う。

# 方程式を解く方法

- グラフを使う方法
- 中点法
- レギュラ・ファルシ法
- (ニュートン法)

# グラフを使う方法(1/3)

- 方程式の解  $x$  は  $f(x) = 0$  となる  
→  $y = f(x)$  のグラフを書いて、 $x$  軸との交点の  $x$  座標を求めればよい。



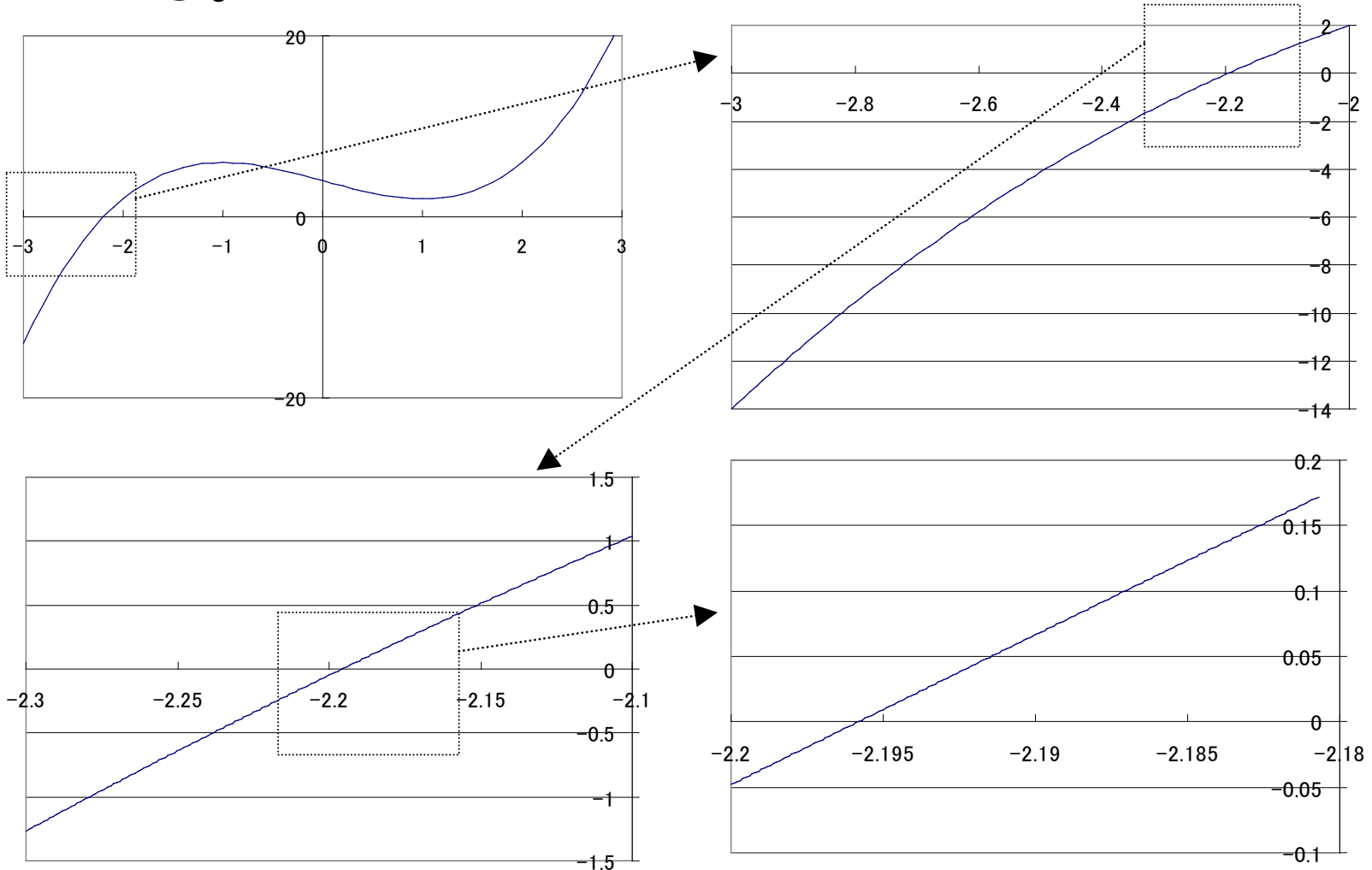
# グラフを使う方法(2/3)

[長所] グラフが簡単に描ければ, どの辺に解があるかを予め知ることが出来る。

- Excelのグラフ機能を活用する。
- 手順:
  1. A列に  $x$  の値を一定刻みで並べる
  2. B列に  $f(x)$  の値を自動的に計算させて並べる
  3. 計算したA, B列のセルを選択し, グラフウィザードを起動してグラフを描く。

# グラフを使う方法(3/3)

- [短所] **正確な**交点の位置を求めるのは手間がかかる。



# 練習1

- $y = x^2 - 2$ のグラフを描き, 方程式  $x^2 - 2 = 0$  の解がどの辺りにあるかを確認せよ。但し, 全ての解がどの辺にあるのか分かる範囲に設定すること。
  1.  $x$ の範囲が-10から10まで, 刻み幅1
  2. -5から5まで, 刻み幅0.5
  3. -2から2まで, 刻み幅0.1
  4. 1から2まで, 刻み幅0.05



# グラフの描き方(1/2)

1. 最初の $x$ の値を代入し,  $y$ の値を自動計算させる。

	A	B	
1	x	y	
2	-10	=A2^2-2	

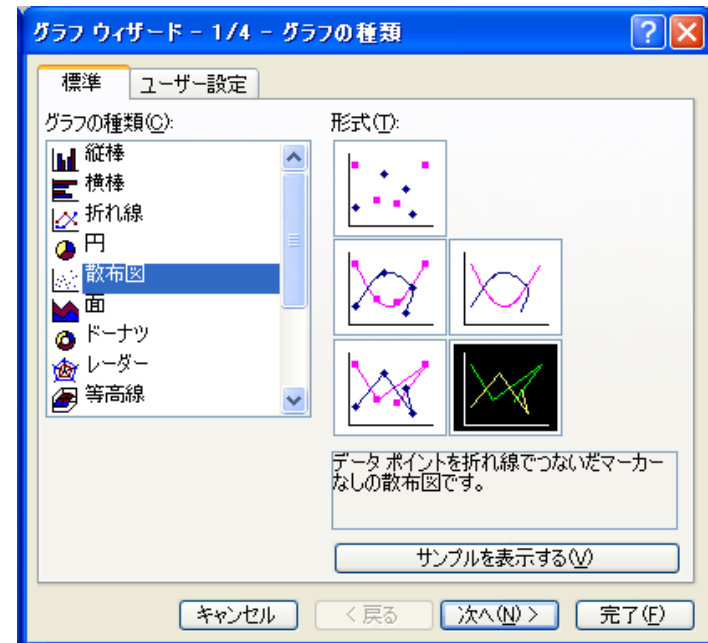
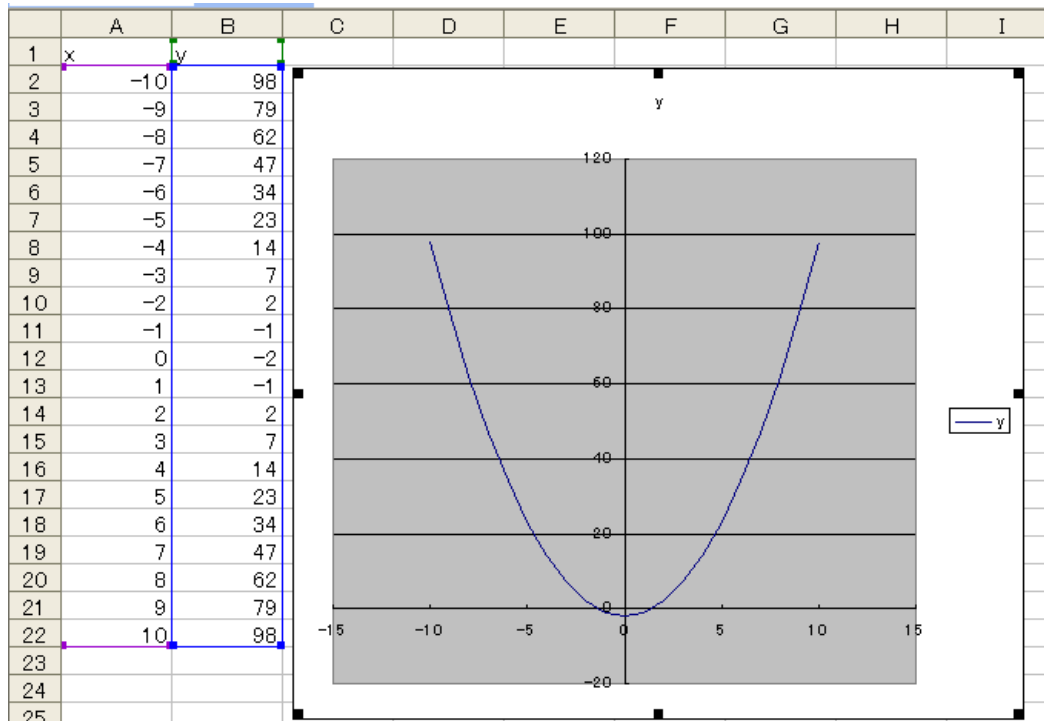
2. 次の $x$ の値を, 刻み幅を加えて自動計算させ,  $y$ の値は上の計算式をコピーしてこれも自動計算させる。

	A	B	
1	x	y	
2	-10		98
3	=A2+1		79

3. 最後の $x$ の値になるまでA, B列のセルを下にコピーし続ける。

# グラフの描き方(2/2)

4. 計算が完了したら、計算したセルを全て選択し、グラフウィザードを起動して「散布図」を選ぶ。
5. グラフを描く。



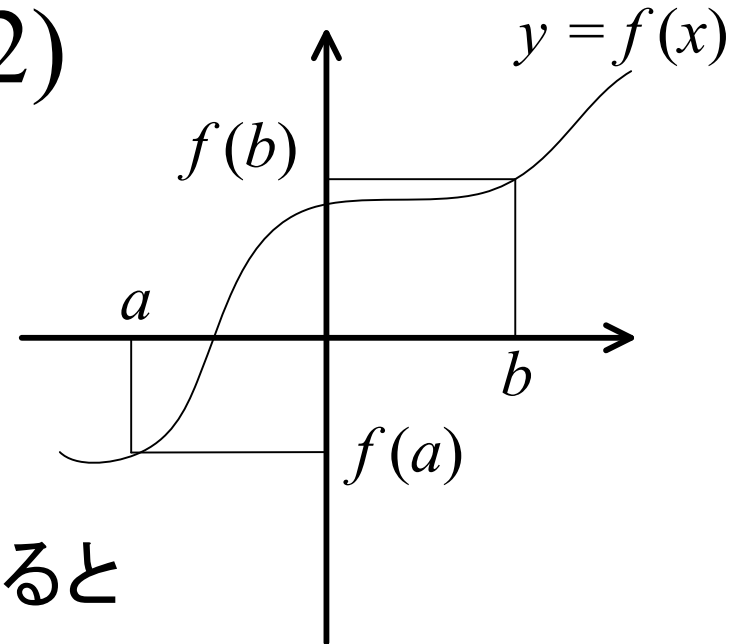
# 中点法(1/2)

1. 方程式の解  $x$  が一つだけ含まれる区間  $[a, b]$  を決める。
2.  $c = (a + b) / 2$  として区間の中点を設定し,  $[a, c]$ (左側),  $[c, b]$ (右側)どちらかの, 解が含まれている区間を見つける。
3. 解が含まれている区間を新たに  $[a, b]$  とする。
4. 1~3の手続きを続ける。

# 中点法(2/2)

[原理] 解が一つだけ区間 $[a, b]$ に含まれている

$$\rightarrow f(a)f(b) < 0$$



区間の中点を $c = (a + b) / 2$ とすると

(1)  $[a, c]$ に解が含まれている  $\rightarrow f(a)f(c) < 0$

(2)  $[c, b]$ に解が含まれている  $\rightarrow f(c)f(b) < 0$

のどちらかになる。よって

(1)の場合は,  $b := c$ ,  $a$ はそのまま

(2)の場合は,  $a := c$ ,  $b$ はそのまま

としてこの手続きを繰り返す。

# ExcelのIF関数

=IF(  
条件式,  
条件式が満たされている時の値(式),  
条件式が満たされていない時の値(式)  
)

例

次の $a$ の値・・・  $=\text{IF}(\underline{f(a) * f(c) < 0}, a, c)$

次の $b$ の値・・・  $=\text{IF}(\underline{f(c) * f(b) < 0}, b, c)$

# 練習2

- 練習1の結果を使って,  $a, b$ を設定し, 中点法を用いて方程式  $x^2 - 2 = 0$ の正の解を見つけてみよ。

# Excelで中点法を実行する(1/3)

1. 方程式と見出しを記入し, 最初の $a, b$ の値をセルに記入する。
2.  $c, f(a), f(b), f(c)$ の値を自動計算させる。

	A	B	C	D	E	F
1	$x^2-2=0$					
2						
3	a	b	c	f(a)	f(b)	f(c)
4	0	10	$=(A4+B4)/2$		98	23

# Excelで中点法を実行する(2/3)

3. (1)の判定をするための数式を記入する。

VARP    ✖ ✔ &    =IF(D4\*F4<0,A4,C4)

	A	B	C	D	E	F
1	$x^2-2=0$					
2						
3	a	b	c	f(a)	f(b)	f(c)
4	0	10	5	-2	98	23
5	=IF(D4*F4<0,A4,C4)		2.5	-2	23	4.25

4. (2)の判定をするための数式を記入する。

	b	c	f(
)	10	5	
)	=IF(E4*F4<0,B4,C4)		

5.  $c$ から  $f(c)$ までは上の式をそのままコピーする。

a	b	c	f(a)	f(b)	f(c)	
	0	10	5	-2	98	23
	0	5	2.5	-2	23	4.25



# Excelで中点法を実行する(3/3)

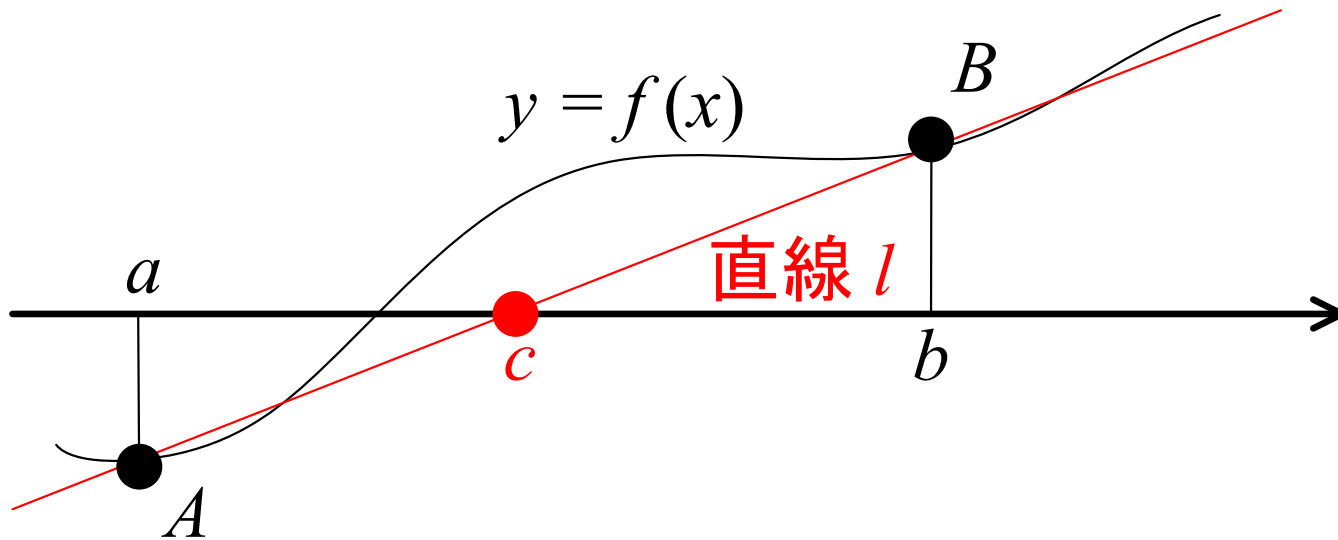
6.  $a, b, c$ の値が同じになるまで全ての列を下にコピーし続ける。

A5      =IF(D4\*F4<0,A4,C4)

	A	B	C	D	E	F
1	$x^2-2=0$					
2						
3	a	b	c	f(a)	f(b)	f(c)
4	0	10	5	-2	98	23
5	0	5	2.5	-2	23	4.25
6	0	2.5	1.25	-2	4.25	-0.4375
7	1.25	2.5	1.875	-0.4375	4.25	1.515625
8	1.25	1.875	1.5625	-0.4375	1.515625	0.4414063
9	1.25	1.5625	1.40625	-0.4375	0.4414063	-0.022461
10	1.40625	1.5625	1.484375	-0.022461	0.4414063	0.2033691
11	1.40625	1.484375	1.4453125	-0.022461	0.2033691	0.0889282
12	1.40625	1.4453125	1.4257813	-0.022461	0.0889282	0.0328522
13	1.40625	1.4257813	1.4160156	-0.022461	0.0328522	0.0051003
14	1.40625	1.4160156	1.4111328	-0.022461	0.0051003	-0.008704
15	1.4111328	1.4160156	1.4135742	-0.008704	0.0051003	-0.001808
16	1.4135742	1.4160156	1.4147949	-0.001808	0.0051003	0.0016447
17	1.4135742	1.4147949	1.4141846	-0.001808	0.0016447	-8.2E-05
18	1.4141846	1.4147949	1.4144897	-8.2E-05	0.0016447	0.0007812
19	1.4141846	1.4144897	1.4143372	-8.2E-05	0.0007812	0.0003496
20	1.4141846	1.4143372	1.4142609	-8.2E-05	0.0003496	0.0001338
21	1.4141846	1.4142609	1.4142227	-8.2E-05	0.0001338	2.589E-05
22	1.4141846	1.4142227	1.4142036	-8.2E-05	2.589E-05	-2.81E-05

example/graph/Sheet1/midpoint/regula-falsi/newton/

# レギュラ・ファルシ法(1/2)



1. 解に近い2点 $A: (a, f(a))$ ,  $B: (b, f(b))$ を決める。
2.  $A, B$ を通過する直線  $l$  を求める。
3.  $l$ と  $x$  軸との交点 $C: (c, 0)$ を求める。
4. 新 $A :=$  旧 $B$  ( $a := b$ ), 新 $B := C$  ( $b := c$ ) とする。
5. 1~4の手続きを繰り返す。

# レギュラ・ファルシ法(2/2)

直線  $l$  は

$$y - f(b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - b)$$

より

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x + \frac{f(a)b - f(b)a}{b - a}$$

となるので,  $x$  軸との交点は  $y = 0$  より

$$c = \frac{f(b)a - f(a)b}{f(b) - f(a)}$$

となる。この  $c$  は  $b$  より解に近いと考えられるから,

$$a := b, b := c$$

として, 同じ手続きを続ける。

# 練習3

- 練習1の結果を使って $a, b$ を設定し, レギュラ・ファルシ法を用いて方程式  $x^2 - 2 = 0$  の正の解を見つけてみよ。

# Excelでレギュラ・ファルシ法を実行する(1/2)

1. 方程式, 見出し, 最初の $a$ ,  $b$ の値を代入し,  $f(a)$ ,  $f(b)$ の値を自動計算させる。

	A	B	C	D	E
1	$x^2-2=0$				
2					
3	a	b	f(a)	f(b)	c
4	0	10	-2	98	

2.  $c$ の値を自動計算させる。

c
$= (D4 * A4 - C4 * B4) / (D4 - C4)$

3. 次の $a$ の値を上の上の $b$ に, 次の $b$ の値を上の上の $c$ に設定する。

3	a	b
4	0	10
5	=B4	0.2

b	f(a)	f(b)	c
10	-2	98	0.2
=E4	98	-1.96	0.3921569

# Excelでレギュラ・ファルシ法を実行する(2/2)

4.  $f(a), f(b), c$ の計算は上からコピーする。

	A	B	C	D	E
1	$x^2-2=0$				
2					
3	a	b	f(a)	f(b)	c
4	0	10	-2	98	0.2
5	10	0.2	98	-1.96	0.3921569

5.  $a, b$ の値が一致するまで, 5行目を下へコピーし続ける。

	A	B	C	D	E
1	$x^2-2=0$				
2					
3	a	b	f(a)	f(b)	c
4	0	10	-2	98	0.2
5	10	0.2	98	-1.96	0.3921569
6	0.2	0.3921569	-1.96	-1.846213	3.5099338
7	0.3921569	3.5099338	-1.846213	10.319635	0.8652912
8	3.5099338	0.8652912	10.319635	-1.251271	1.1512813
9	0.8652912	1.1512813	-1.251271	-0.674551	1.4857852
10	1.1512813	1.4857852	-0.674551	0.2075577	1.4070774
11	1.4857852	1.4070774	0.2075577	-0.020133	1.414037
12	1.4070774	1.414037	-0.020133	-0.000499	1.414214
13	1.414037	1.414214	-0.000499	1.263E-06	1.4142136
14	1.414214	1.4142136	1.263E-06	-7.89E-11	1.4142136
15	1.4142136	1.4142136	-7.89E-11	0	1.4142136

# どちらが早く解に近づくか？

- 方程式にもよるが、レギュラ・ファルシ法の方が中点法より若干早く解に近づく。

	A	B	C	D	E	F
1	$x^2-2=0$					
2						
3	a	b	c	f(a)	f(b)	f(c)
4	0	10	5	-2	98	23
5	0	5	2.5	-2	23	4.25
6	0	2.5	1.25	-2	4.25	-0.4375
7	1.25	2.5	1.875	-0.4375	4.25	1.515625
8	1.25	1.875	1.5625	-0.4375	1.515625	0.4414063
9	1.375	1.5625	1.46875	-0.4375	0.4414063	0.022461
10	1	<b>中点法・・・28回</b>				0.2033691
11	1					0.0889282
12	1.40625	1.4403125	1.420813	-0.022461	0.0889282	0.0328522
13	1.40625	1.4257813	1.4160156	-0.022461	0.0328522	0.0051003
14	1.40625	1.4160156	1.4111328	-0.022461	0.0051003	-0.008704
15	1.4111328	1.4160156	1.4135742	-0.008704	0.0051003	-0.001808
16	1.4135742	1.4160156	1.4147949	-0.001808	0.0051003	0.0016447
17	1.4135742	1.4147949	1.4141846	-0.001808	0.0016447	-8.2E-05
18	1.4141846	1.4147949	1.4144897	-8.2E-05	0.0016447	0.0007812
19	1.4141846	1.4144897	1.4143372	-8.2E-05	0.0007812	0.0003496
20	1.4141846	1.4143372	1.4142609	-8.2E-05	0.0003496	0.0001338
21	1.4141846	1.4142609	1.4142227	-8.2E-05	0.0001338	2.589E-05
22	1.4141846	1.4142227	1.4142036	-8.2E-05	2.589E-05	-2.81E-05

	A	B	C	D	E
1	$x^2-2=0$				
2					
3	a	b	f(a)	f(b)	c
4	0	10	-2	98	0.2
5	10	0.2	98	-1.96	0.3921569
6	0.2	0.3921569	-1.96	-1.846213	3.5099338
7	<b>レギュラ・ファルシ法・・・12回</b>				12
8					13
9	0.8652912	1.1512813	-1.251271	-0.674551	1.4857852
10	1.1512813	1.4857852	-0.674551	0.2075577	1.4070774
11	1.4857852	1.4070774	0.2075577	-0.020133	1.414037
12	1.4070774	1.414037	-0.020133	-0.000499	1.414214
13	1.414037	1.414214	-0.000499	1.263E-06	1.4142136
14	1.414214	1.4142136	1.263E-06	-7.89E-11	1.4142136
15	1.4142136	1.4142136	-7.89E-11	0	1.4142136

# 課題

次の方程式の解の一つを,

(a) グラフを書いて, 解の個数と大体の位置の見当をつける

(b) 中点法で求める

(c) レギュラ・ファルシ法で求める

として求めよ。

[注意] 必ず  $f(x) = 0$  の形に移項してから計算すること!

(1)  $x^2 = -3x + 10$

(2)  $x^3 = 3$

(3)  $x^3 = 2$