第2章　数の体系の中の複素数

2.1　自然数，整数，有理数，実数，そして複素数

小学，中学，高校で学んできた数学において使用してきた「数 (number)」は 5 種類あった。自然数 (natural number)，整数 (integer)，有理数 (rational number)，実数 (real number)，複素数 (complex number) である。これらの数は全て無限個数存在し，それぞれ集合 (set) としてカテゴライズされ，それぞれ $\mathbb{N}$(自然数の集合), $\mathbb{Z}$(整数の集合), $\mathbb{Q}$(有理数の集合), $\mathbb{R}$(実数の集合), $\mathbb{C}$(複素数の集合) と太字の大文字で表記される。この 5 種類の数はどのような性質を持っていたか，簡単に復習しておくことにする。

自然数の集合 $\mathbb{N}$ を本書では

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$$

と定義する。0 は自然数に含めないことが多いが，含んでいても困ることはない。また，自然数は他の集合の要素の添え字 (index) としてよく用いられるが，その際には 0 も使うことが増えてきており，利便性を高める意味でも自然数の一員としてカウントしておくことにする。

$\mathbb{N}$ は加算 (+)，乗算 (× 又は · 又は省略) に関して閉じている，という性質を持っている。即ち，

$$\left.\begin{array}{rcl} a+b & \in & \mathbb{N} \\ a \cdot b & \in & \mathbb{N} \end{array}\right\} \text{ for } \forall a, b \in \mathbb{N}$$

となる。つまり，任意の自然数同士の加算及び乗算の結果は必ず自然数となる。

整数の集合 $\mathbb{Z}$ は

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\} = \{\ldots, -2, -1\} \cup \mathbb{N}$$

と定義される。自然数の負 (minus) の整数を追加した集合となっており，加算，乗算だけでなく，減算 (−) に関しても閉じている。

有理数の集合 $\mathbb{Q}$ は，これ以上約分できない既約分数 (irreducible fraction) の集合である。分子 (numerator) として $\mathbb{Z}$，分母 (denominator) として 0 を除いた自

表 2.1: 有理数の集合

分子 → 分母 ↓	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	$\cdots$
1	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	$\cdots$
2	$\cdots$	-1	$-1/2$	0	$1/2$	1	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

然数の集合 $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$ を取ると，これらの直積 $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ として定義されたものと見ることもできる (表 2.1)。

$\mathbb{Q}$ は加算，乗算，減算だけでなく，割る数として 0 を除いた除算 (/) に関しても閉じている。

既約分数は 10 進小数 (decimal fraction) としても表現できるが，有限桁に収まる小数，即ち有限小数 (terminating decimal fraction) になるものと，同じ桁パターンが繰り返し無限に連なる循環 (無限) 小数 (recurring decimal fraction) になるものとに分かれる。

例えば，有限小数 0.3145 は

$$\frac{3145}{10000} = \frac{629}{2000}$$

という既約分数の表現であるが，循環小数 $0.314531453145\cdots$ は

$$\begin{aligned}
0.314531453145\cdots &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 3145 \cdot 10^{-4i} \\
&= 3145 \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 10^{-4i} \\
&= 3145 \cdot \frac{10^{-4}}{1 - 10^{-4}} \\
&= \frac{3145}{9999}
\end{aligned}$$

という既約分数の表現である。いずれの小数も $\mathbb{Q}$ の要素である。

では，循環しない無限小数，例えば

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} &= 1.41421356\cdots \\
\pi &= 3.1415923653\cdots \\
e &= 2.718281\cdots
\end{aligned}$$

はどうなるのか。これらはいずれも既約分数を四則演算を用いて無限個組み合わせることによって得られるものである。しかしこれらはもはや既約分数として表現できず，$\mathbb{Q}$ の要素ではない。従って，$\mathbb{Q}$ は無限回の四則演算に関しては閉じているとは言えない。このような極限値 (limit value) を考えるためには循環しない無限小数，つまり無理数 (irrational number) も含む数の集合，即ち実数が不可欠となったのである。

実数の集合 $\mathbb{R}$ は，$\mathbb{Q}$ と無理数の集合を合わせたもので，幾何学的には数直線 (real line) と同一視することが多い (図 2.1)。

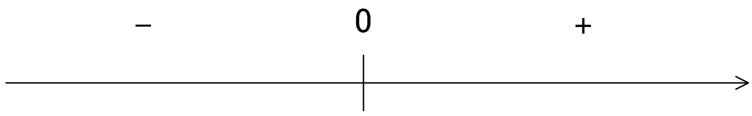

図 2.1: $\mathbb{R}$ の幾何学的表現としての数直線

$\mathbb{R}$ を構成することによって，四則演算及び極限操作全てに関して閉じた数の集合が完成したことになる。微分積分は実数の存在なくしては成り立たない理論体系なのである。しかしこれにもまだ不備がある。

実数を係数とする代数方程式の解は必ずしも実数の範囲に収まらない。よく知られているように，2 次 (代数) 方程式

$$x^2 - 3x + 4 = 0$$

の解は $\sqrt{-7}$，即ち，2 乗すると -7 という負の実数になる要素を含まなくてはならない。即ち，実数係数 (実係数) の n 次代数方程式 ($n \in \mathbb{N} < \infty$) の解に関しては，$\mathbb{R}$ は閉じていないことになる。閉じるためには新たな数を考案する必要が出てくる。

2.2　複素数

そこで，$\sqrt{-7} = \sqrt{7} \cdot \sqrt{-1}$ と実数とそうでない成分に分離し，$\sqrt{-1}$ を新たに虚数単位 (imaginary unit)[1] と命名することにして，実数とは異なる数，即ち虚数 (imaginary number) を作ることにする。こうして複素数 $\mathbb{C}$ は $\mathbb{R}$ の直積として

$$\mathbb{C} = \left\{ a + b\sqrt{-1} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

[1] 虚数単位はアルファベット小文字の i もしくは j で代用することが多いが，i も j も他の用途に使用されることが多く紛らわしいので本書では使用しない。

のように，実数（実数部，実部 (real part)) と実係数 (虚数部，虚部 (imaginary part)) の虚数との和として表現される。複素数 $c \in \mathbb{C}$ が与えられた時，実部と虚部はそれぞれ

$$\mathrm{Re}(c) = a,\ \mathrm{Im}(c) = b \tag{2.1}$$

という記号で表現する。これを特に断らない限り，複素数の標準形と呼ぶ。

複素数は幾何学的には実部と虚部をそれぞれ x, y 軸に割り当てた $\mathbb{R}^2$ 平面と同一視される。これを Gauss 平面と呼ぶ (図 2.2)。

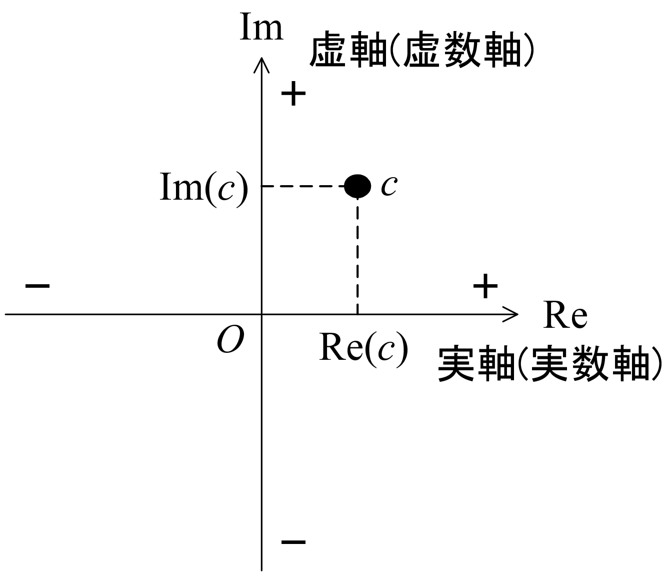

図 2.2: $\mathbb{C}$ の幾何学的表現としての $\mathbb{R}^2$ 平面

複素数の係数 (複素係数) を持つ n 次代数方程式の解は，重複も込めて必ず n 個存在し，全て $\mathbb{C}$ の要素となる (代数方程式の基本定理)。よって，$\mathbb{C}$ は四則演算，極限操作，代数方程式の解の全てに関して閉じていることになる。

こうして，$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ という包含関係を持つ 5 種類の数の性質を示してきたが，これらは全て無限個の要素から成る無限集合である。このうち，$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ は，$\mathbb{N}$ の要素と一対一対応 (単射) が存在する，即ち自然数の添え字を付けることが可能な可算 (countable)，あるいは離散 (discrete) 無限集合であるのに対し，$\mathbb{R}$ と $\mathbb{C}$ は非可算 (uncountable) 無限の集合である。

ちなみに $\mathbb{C}$ 以外の集合においては要素間の大小関係が決まるのに対し，$\mathbb{C}$ では大小関係が規定できない。従って，複素数同士の比較は等号が成立するか否かを決めることしかできない。

2.3　複素数の基本演算

本書では，複素数の演算が必須である。ここで復習も兼ねて，複素数の基本演算とその意味をもう一度確認しておこう。

任意の複素数 $c = \mathrm{Re}(c) + \mathrm{Im}(c)\sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ は 2 つの実数の組 $(\mathrm{Re}(c), \mathrm{Im}(c))$ として表現できる。従って，複素数の四則演算は全て実数のそれを組み合わせることによって実現できる。そして当然ながら，複素数の四則演算は実数の四則演算の純然たる拡張となっている。つまり複素数でも実数でも同じ意味で定義されている基本演算 $*$ があれば，$x, y \in \mathbb{C}$ が実は $x, y \in \mathbb{R}$ であっても同じ値を与えるものでなければならない。これは他の初等関数についても同様である。

2.3.1　複素共役

$a = \mathrm{Re}(a) + \mathrm{Im}(a)\sqrt{-1}$ であるとき，a の複素共役 $\bar{a}$ は，虚数部の符号を反転させて以下のように定義される。

$$\bar{a} = \mathrm{Re}(a) - \mathrm{Im}(a)\sqrt{-1} \in \mathbb{C} \tag{2.2}$$

Gauss 平面に示すと，ちょうど虚軸に対して対称な位置に移動したということになる。

2.3.2　複素数の絶対値

複素数の絶対値は，実数同様，原点からの距離 (正の実数) を意味する。従って，三平方の定理から下記のように定義される。

$$|a| = \sqrt{(\mathrm{Re}(a))^2 + (\mathrm{Im}(a))^2} \in \mathbb{R} \tag{2.3}$$

2.3.3　加法と減法

加法 (足し算) と減法 (引き算) は，実数部，虚数部どうしをそれぞれ加減算すればよい。

$$a \pm b = (\mathrm{Re}(a) \pm \mathrm{Re}(b)) + (\mathrm{Im}(a) \pm \mathrm{Im}(b))\sqrt{-1} \tag{2.4}$$

2.3.4　乗法と除法

乗法 (掛け算) は，虚数単位の $\left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$ という性質を用いて展開して整理すれば下記のように定義される。

$$a \times b = a \cdot b = ab = (\mathrm{Re}(a)\mathrm{Re}(b) - \mathrm{Im}(a)\mathrm{Im}(b)) + (\mathrm{Im}(a)\mathrm{Re}(b) + \mathrm{Re}(a)\mathrm{Im}(b))\sqrt{-1} \tag{2.5}$$

除法 (割り算) を定義するには，まず複素数の逆数を定義しておく必要がある。非零の複数 $b \neq 0$ の逆数を標準形で表現すると

$$b^{-1} = 1/b = \frac{1}{b} = \frac{\overline{b}}{|b|^2} = \frac{\mathrm{Re}(b)}{|b|^2} - \frac{\mathrm{Im}(b)}{|b|^2}\sqrt{-1} \tag{2.6}$$

となる。従って，$a/b = a \times (1/b)$ と考えれば，複素数の除法は

$$a/b = \frac{a}{b} = \frac{a\overline{b}}{|b|^2} \tag{2.7}$$

ということになる。

練習問題

1. (2.5) 式を証明せよ。
2. 複素数の絶対値 (2.3) は
$$|a| = \sqrt{a \cdot \overline{a}}$$
と定義できることを示せ。
3. 次の計算を行え。
   (a) $\left(3 + \sqrt{-1}\right) + \left(\sqrt{2} - 3\sqrt{-1}\right)$
   (b) $\left(3 - \sqrt{-1}\right)\left(3 + \sqrt{-1}\right)$
   (c) $\left(3 - \sqrt{-1}\right) / \left(3 + \sqrt{-1}\right)$
4. 任意の $x, y \in \mathbb{C}$ に対し，三角不等式
$$|x - y| \leq |x| + |y|$$
が成立することを証明せよ。また，等号が成立するときの条件も明示せよ。