第7章　代数方程式の解法 ··· 2から4次までの代数的解法

n 代数方程式とは，n 次多項式 $p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ がゼロになる等式，即ち

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \tag{7.1}$$

を言う。ここで $n \in \mathbb{N}, n > 1$ であり，係数 a_i $(i = 0, 1, ..., n)$ は定数である。a_i が実数の時を実係数代数方程式と呼ぶ。一般に $n \geq 5$ の時は有限回の代数演算 (四則演算，べき乗) では解けないが，$n = 1, 2, 3, 4$ の時は必ず有限回で解くことができる。

ここではまず実係数の場合の 1〜4 次代数方程式を解く手順を解説するが，この手順は a_i が複素係数になってもほとんど変わるところがない。その意味も考えながら読んで頂きたい。

7.1　1次と2次方程式

1 次方程式

$$a_1 x + a_0 = 0 \ \ (a_1 \neq 0) \tag{7.2}$$

は

$$x = -a_0/a_1$$

とすればよい。2 次方程式

$$a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

は中学校で習うように

$$x = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2 a_0}}{2a_2} \tag{7.3}$$

を計算すればよい。

7.2　3 次方程式

3 次方程式

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \ (a_3 \neq 0) \tag{7.4}$$

に対する解公式は Cardano 法と呼ばれる。この解公式を導く手順を大雑把に示す。

まず

$$x = y - \frac{a_2}{3a_3}$$

とし，式 (7.4) に代入して

$$y^3 + 3py + q = 0 \tag{7.5}$$

と式変形する。この時

$$\begin{aligned} p &= -\frac{a_2^2}{9a_3^2} + \frac{a_1}{3a_3} \\ q &= \frac{2a_2^3}{27a_3^3} - \frac{a_1a_2}{3a_3^2} + \frac{a_0}{a_3} \end{aligned}$$

である。更に $y = u + v$ とし，かつ u と v は $uv = -p$ を満足するものとすると，式 (7.5) の y に代入して

$$u^3 + v^3 = -q$$

を得る。また $u^3v^3 = -p^3$ なので，u^3, v^3 は 2 次方程式

$$z^2 + qz - p^3 = 0$$

の解である。従って

$$\begin{aligned} u^3 &= \frac{-q + \sqrt{q^2 + 4p^3}}{2} \\ v^3 &= \frac{-q - \sqrt{q^2 + 4p^3}}{2} \end{aligned}$$

である。これを満足するもののうち一つを $\hat{u}, \hat{v}$ とし，1 の複素数 3 乗根の ω_3 を用いると，$uv = -p$ を満足するものは

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \hat{u} + \hat{v} \\ \beta_2 &= \omega_3\hat{u} + \omega_3^2\hat{v} \\ \beta_3 &= \omega_3^2\hat{u} + \omega_3\hat{v} \end{aligned} \tag{7.6}$$

である。従って式 (7.5) の解 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ を具体的に書くと

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \hat{u}+\hat{v}\\ \beta_2 &= -\frac{1}{2}(\hat{u}+\hat{v})-\sqrt{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}(\hat{u}-\hat{v}) \\ \beta_3 &= -\frac{1}{2}(\hat{u}+\hat{v})+\sqrt{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}(\hat{u}-\hat{v})\end{aligned} \tag{7.7}$$

となる。よって，これらを用いて元の 3 次代数方程式 (7.4) の解 $\alpha_i \ (i=1,2,3)$ は

$$\alpha_i = \beta_i - \frac{a_2}{3a_3} \ (i=1,2,3)$$

となる。

7.3 4 次方程式

4 次方程式

$$a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \ \ (a_4 \neq 0) \tag{7.8}$$

に対する解公式は Ferrari 法と呼ばれる。これも Cardano 法と同様に

$$x = y - \frac{a_3}{4a_4}$$

とおいて式 (7.8) に代入することにより

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0 \tag{7.9}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned}p &= -\frac{3a_3^2}{8a_4^2}+\frac{a_2}{a_4}\\ q &= \frac{a_3^3}{8a_4^3}-\frac{a_2a_3}{2a_4^2}+\frac{a_1}{a_4}\\ r &= -\frac{3a_3^4}{256a_4^4}+\frac{a_2a_3^2}{16a_4^3}-\frac{a_1a_3}{4a_4^2}+\frac{a_0}{a_4}\end{aligned}$$

である。

$q=0$ の時は直ちに因数分解でき

$$\left(y^2 - \frac{-p-\sqrt{p^2-4r}}{2}\right)\left(y^2 - \frac{-p+\sqrt{p^2-4r}}{2}\right) = 0$$

を y について解けばよい。

$q \neq 0$ の時は，式 (7.9) を

$$y^4 = -py^2 - qy - r$$

とし，この両辺に $y^2 z + z^2/4$ を加えて

$$\left(y^2 + \frac{z}{2}\right)^2 = (z-p)\left(y - \frac{q}{2(z-p)}\right)^2 + \frac{1}{4(z-p)}(z^3 - pz^2 - 4rz + 4pr - q^2) \tag{7.10}$$

と式変形する。さすれば右辺の 3 次式が $z^3 - pz^2 - 4rz + 4pr - q^2 = 0$ となる z を一つ見つければ，$q = 0$ の時と同様，直ちに因数分解でき

$$\left(y^2 + \frac{z}{2} - \sqrt{z-p}\left(y - \frac{q}{2(z-p)}\right)\right)\left(y^2 + \frac{z}{2} + \sqrt{z-p}\left(y - \frac{q}{2(z-p)}\right)\right) = 0 \tag{7.11}$$

を y について解けばよいことになる。そして得られた 4 つの解 β_i $(i = 1, \ldots, 4)$ に対して

$$\alpha_i = \beta_i - \frac{a_3}{4a_4} \ (i = 1, 2, 3, 4)$$

を計算すれば，これが元の 4 次方程式の解になる。

7.4　複素係数の場合は？

上記の 1 次〜4 次方程式の解法を見ていくと，全ての場合で

$$x = y - \frac{a_{n-1}}{na_n}$$

という一次変換を行っていることが分かる。これを Tschirnhaus 変換と呼び，これにより，任意の n 次代数方程式 (7.1) を

$$y^n + b_{n-2}y^{n-2} + \cdots + b_n y + b_0 = 0 \tag{7.12}$$

というように，$n-1$ 次係数をゼロにすることができる。1 次方程式の時はこれがそのまま解となる。これは複素係数の場合も同じである。

そして，以降の解法そのものもほとんどそのまま適用できる。5.4 節で述べたように，z が複素数の場合もその平方根は $\pm\sqrt{z} \in \mathbb{C}$ と表記できるので，2 次方程式の解の公式 (7.3) は複素係数であってもそのまま適用して良い。

さすれば 3 次方程式用の Cardano 法でも 2 次方程式の解法を用いているから，(7.7) を除いて変更する必要はない。4 次方程式用の Ferrari 法は 2 次方程式の解法そのもので構成されているため，これも変更の必要がないのである。

7.5　5 次以上の代数方程式は?

有限回の操作では厳密に解けないので，近似解法を用いる。例えば Newton 法 (8.14) や，解と係数の関係式に基づき，これを n 変数の代数方程式として見て多次元複素 Newton 法を適用する Duran-Kerner 法を用いる。

但し，今では IEEE754 倍精度計算が高速化され，メモリも大量に使えるので，行列の固有値解法の手法を適用した方が良いとされている。

練習問題

1. 2 次方程式の解の公式はどのように得られたか，説明せよ。
2. Tschirnhaus 変換により (7.12) が得られることを証明せよ。
3. 次の代数方程式の解を求めよ。
   (a) $\sum_{i=0}^{n} x^i = 0 \ (i = 1, 2, 3, 4)$
   (b) $2x^3 - \left(38 + 28\sqrt{-1}\right)x^2 + \left(134 + 382\sqrt{-1}\right)x + 232 - 1224\sqrt{-1} = 0$
   (c) $x^4 - \left(21 + 25\sqrt{-1}\right)x^3 + \left(-75 + 393\sqrt{-1}\right)x^2 + \left(1939 - 985\sqrt{-1}\right)x - 3916 - 2047\sqrt{-1} = 0$
4. 次の行列の固有方程式を求め，代数方程式の解法を用いて全ての固有値を求めよ。

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \\
A_2 &= \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{-1} & 2 \\ 2 & 2 - 3\sqrt{-1} \end{bmatrix} \\
A_3 &= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
A_4 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$