第8章　複素数の世界における微分

8.1　複素数関数の微分

実数の引数を持つ実数関数 $f(x)$ がある実数区間 $I \subset \mathbb{R}$ で微分可能であるとは，

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} < +\infty \text{ for } \forall x \in I$$

となることであり，この極限値を

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)$$

と表わしたのである。

であれば，当然，実数の引数を持つ実数関数 $u(x), v(x)$ があり，これらから，実引数をとる複素関数 $f(x) = u(x) + v(x)\sqrt{-1}$ が定義されていれば，これが $x \in I$ で微分可能であるとは

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \sqrt{-1} \cdot \lim_{k\to 0} \frac{v(x+k) - v(x)}{k} = u'(x) + v'(x)\sqrt{-1}$$

が成立することを意味する。

では複素数の引数 z を持つ複素関数 $f(z)$ がある領域 $D \subset \mathbb{C}$ で微分可能であるとはどのような定義になるか？　素朴に実関数の定義を拡張すれば

$$f'(z) = \frac{d}{dz} f(z) = \lim_{H\to 0} \frac{f(z+H) - f(z)}{H} \quad (\forall z \in D) \tag{8.1}$$

ということになるが，この場合，当然 $H \in \mathbb{C}$ でなければ不自然である。となると，Gauss 平面上において，どのように H が原点 O に近づこうとも極限値が存在する，ということでなければ，自然な拡張とは言えない。

8.2　Cauchy-Riemann の関係式

複素変数を取る複素関数の微分の定義 (8.1) をを実数の言葉で言い換えると，次のようになる。

$\mathrm{Re}(z) = x, \mathrm{Im}(z) = y$ とおくと，複素関数 $f(z)$ は 2 変数の実数関数 $u(x,y), v(x,y)$ を用いて

$$f(z) = f(x,y) = u(x,y) + v(x,y)\sqrt{-1} \tag{8.2}$$

と表現することができる。さすれば，$H = h + k\sqrt{-1}$ $(h,k \in \mathbb{R})$ とおけば，$H \to 0$ とは，h と k はそれぞれ独立に $h \to 0, k \to 0$ として良い，ということになる。つまり，この領域 D において，$u(x,y)$, $v(x,y)$ も微分可能，即ち $u_x(x,y) = \partial u/\partial x$, $u_y(x,y) = \partial u/\partial y$, $v_x(x,y) = \partial v/\partial x$，$v_y(x,y) = \partial v/\partial y$ がそれぞれ存在していなければならない。

さて，もし $f(z)$ が，$z \in D$ において微分可能であれば

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(f'(z)) &= \lim_{H\to 0} \mathrm{Re}\left(\frac{f(z+H)-f(z)}{H}\right) &(8.3)\\
\mathrm{Im}(f'(z)) &= \lim_{H\to 0} \mathrm{Im}\left(\frac{f(z+H)-f(z)}{H}\right) &(8.4)
\end{aligned}$$

でなければ困る。

さて (8.2) 式から，

$$\frac{f(z+H)-f(z)}{H} = \frac{(u(x+h,y+k)-u(x,y)) + (v(x+h,y+k)-v(x,y))\sqrt{-1}}{h+k\sqrt{-1}}$$

となる。これにより，もし $k = 0$ と固定し，$h \to 0$ とすれば，(8.3)，(8.4) は

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(f'(z)) &= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h,y)-u(x,y)}{h} = u_x(x,y) &(8.5)\\
\mathrm{Im}(f'(z)) &= \lim_{h\to 0} \frac{v(x+h,y)-v(x,y)}{h} = v_x(x,y) &(8.6)
\end{aligned}$$

となる。同様にして，$h = 0$ と固定し，$k \to 0$ と取れば

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(f'(z)) &= \lim_{k\to 0} \frac{v(x,y+k)-v(x,y)}{k} = v_y(x,y) &(8.7)\\
\mathrm{Im}(f'(z)) &= \lim_{k\to 0} -\frac{u(x,y+k)-u(x,y)}{k} = -u_y(x,y) &(8.8)
\end{aligned}$$

となる。

以上をまとめると，複素変数 z を取る複素関数 $f(z) = f(x,y) = u(x,y) + v(x,y)\sqrt{-1}$ が，ある領域 $D = \{x + y\sqrt{-1} \mid x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$ で微分可能であれば

$$\begin{aligned}
u_x(x,y) &= v_y(x,y)\\
u_y(x,y) &= -v_x(x,y)
\end{aligned} \tag{8.9}$$

という関係式が成立する。これを Cauchy-Riemann の関係式と呼ぶ。

逆に，ある領域 $z = x + y\sqrt{-1} \in D \subset \mathbb{C}$ において，$u(x, y), v(x, y)$ が連続微分可能，かつ Cauchy-Riemann の関係式 (8.9) が成立するのであれば，

$$f'(z) = u_x(x, y) + v_x(x, y)\sqrt{-1} = -v_y(x, y) + u_x(x, y)\sqrt{-1} \tag{8.10}$$

が成立する。これに基づいて，複素関数の導関数が明示的に求められる (→ 練習問題 2)。

8.3 正則関数の性質

複素関数 $f(z)$ が，ある領域 $z \in D \subset \mathbb{C}$ において微分可能で，かつ $f'(z)$ も連続であれば，$f(z)$ は D において**正則** (holomorphic) である，あるいは正則関数であるという。実数関数の場合は連続微分可能という言い方をするが，複素関数が正則である時，実数関数より更に強い条件が成立する。

従って，D において複素関数 $f(z), g(z)$ が正則であれば，その導関数 $f'(z), g'(z)$ は実数関数同様，次のような等式が成立する。

$$\begin{aligned}
(\alpha f(z) \pm \beta g(z))' &= \alpha f'(z) \pm \beta g'(z) \ (\text{ここで}\alpha, \beta \in \mathbb{C}\ \text{は任意の定数}) \\
(f(z)g(z))' &= f'(z)g(z) + f(z)g'(z) \\
\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' &= \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{(g(z))^2} \\
g(f(z)) &= g'(f(z))f'(z) \\
(f^{-1}(w))' &= \frac{1}{f'(z)} \ (\text{ここで}\ w = f(z))
\end{aligned}$$

なお最後の等式においては，$f^{-1}(w)$ は $w = f(z)$ の逆関数を意味する。当然 D においては単射でなければならない。

8.4 複素数関数の Taylor 展開

$z_0 \in \mathbb{C}$ を中心とした Taylor 展開は次のように表現できる。

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(z_0)}{i!}(z - z_0)^i \tag{8.11}$$

特に $z_0 = 0$ の時を Maclaurin 展開と呼び，この時 (8.11) 式は

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} z^i \tag{8.12}$$

のように簡単になる。

8.5　複素 Newton 法

Newton 法は

$$f(\alpha) = 0 \tag{8.13}$$

という非線型方程式の解，即ち零点 (zeros)$\alpha \in \mathbb{C}$ を求めるための近似解法であり，様々な変種が存在する。ここでは素朴なもののみ紹介する。

(8.11) 式のように $f(z)$ が展開できたとすると，$z = \alpha$ であれば当然

$$\underline{f(z_0) + f'(z_0)(\alpha - z_0)} + \frac{f''(z_0)}{2!}(\alpha - z_0)^2 + \cdots = 0$$

も満足することになるが，このような α を見つけることは容易ではない。そこで次善の策として，真の解 α の代わりに，下線部のみをゼロにする $z_1 = z_0 + h \in \mathbb{C}$ を見つけることを考える。さすれば

$$f(z_0) + f'(z_0)h = 0$$

より h は

$$h = -\frac{f(z_0)}{f'(z_0)}$$

となる。これならば，z_0 より $z_1 = z_0 + h$ の方が α に近いのではないかと期待できる。このプロセスを繰り返すのが Newton 法のアルゴリズムである。つまり，適当な初期値 z_0 から出発し，一般の z_{k+1} を

$$z_{k+1} = z_k - \frac{f(z_k)}{f'(z_k)} \tag{8.14}$$

と計算する。

練習問題

1. 次の複素関数に対して，Cauchy-Riemann の関係式が成立することを確認せよ。

   (a) $\exp(z)$

   (b) z^3

2. 正則関数とその導関数が次のようになることを，(8.10) に基づいて証明せよ。

   (a) $(z^n)' = nz^{n-1}$ $(n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$

   (b) $(\exp(z))' = \exp(z)$

   (c) $(\sin z)' = \cos z$

   (d) $(\cos z)' = -\sin z$

3. 前章の練習問題 3 の代数方程式の解を Newton 法で求めよ。