第9章　複素数の世界における積分

9.1　単純曲線とJordan曲線，曲線の向き

実数空間における2次元平面$\mathbb{R}^2$では，曲線Cを一変数2次元関数$\psi(t) = (x(t), y(t))$ $t \in \mathbb{R}$と記述することができた。従って，Gauss平面における曲線Cは

$$z(t) = x(t) + y(t)\sqrt{-1} = \mathrm{Re}(z(t)) + \mathrm{Im}(z(t))\sqrt{-1},\ t \in \mathbb{R}$$

のように，実数を取る一変数関数として記述できる。従って，$\psi(t)$の幾何学的性質は全てGauss平面における$z(t)$のそれと同一視できる。以下，そのように読み換えられたい。

曲線のうち，交わる点が全くないもの，つまり，tが定義されている区間$[a, b]$においてて

$$\psi(t) \neq \psi(t') \text{ for } \forall t \neq t' \in [a, b]$$

となるものを単純曲線(simple curve)と呼ぶ(図9.1の左図)。直感的に，このような単純曲線は線分$[a, b]$との単射(一対一対応)となることは理解できよう。

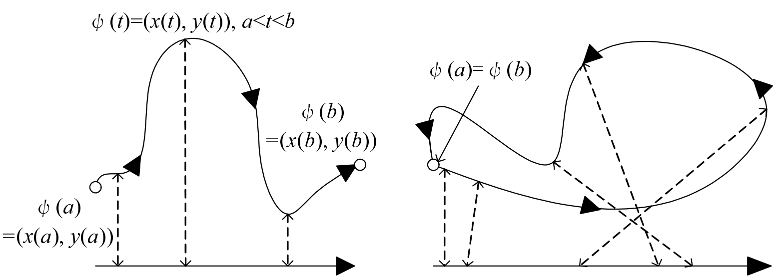

図9.1: 単純曲線(左)と単純閉曲線(右)

更に，区間の始点$t = a$と終点$t = b$においてのみ$\psi(a) = \psi(b)$となる曲線を単純閉曲線と呼ぶ(図9.1の右図)。これも，始点と終点を除けば開区間(a, b)との単射が存在することがわかる。

さて，曲線$C : \psi(t)$が，$t \in [a, b]$で単純閉曲線になるものとする。この時，Cによって平面はCの内部D，境界∂D，それ以外の3つに分割される。この時，開集

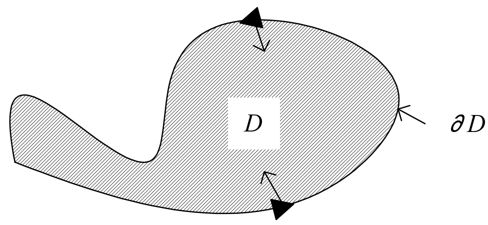

図 9.2: 単純閉曲線の向き

合 D を領域 (region) と呼び，この領域の内部を左に見ながら進む曲線 C の方向を，正の方向，逆方向を負の方向 $-C$ と書くことにする。つまり $-C$ は

$$-C : \psi(a+b-t) = (x(a+b-t),\ y(a+b-t)),\ t \in [a,b]$$

と定義される。領域 D の境界 ∂D の方向もこれと同じである。領域 D とその境界 ∂D を合わせた閉集合は $\overline{D} = D \cup \partial D$ と書くことにする。

さて，本章では複素数を引数とする複素関数 $f(z)$ の積分を考えることになるが，閉領域 $\overline{D}$ における積分は必然的に $z \in D$ に対しては $x = \mathrm{Re}(z)$ と $y = \mathrm{Im}(z)$ の 2 変数の重積分を考えなければならない，ということになる。しかし，実変数の定積分は区間 $[a,b]$ という一次元空間で定義されていたので，複素関数に対してもこれをそのまま拡張した，Gauss 平面上の単純曲線に沿った積分というものを考えるのが自然である。以下，もう一度実変数の実数関数に対する定積分の定義を復習し，それに基づいて複素関数の積分を定義する。

9.2　定積分とは何だったか？

実数の一変数関数 $g(x)$ が，ある区間 $I = [a,b]$ において連続であり，区間 I の長さを

$$|I| = b - a > 0$$

と表わすことにする。

この時 I を適当に n 分割 (等分割とは限らない) すると，

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

という小区間 $\Delta_i x = [x_i, x_{i+1}]x$ の直和分解ができる。当然，$g(x)$ は任意の小区間 $\Delta_i x$ でも連続だから，最大値 $g_i^{\max} = \max_{x\in\Delta_i} g(x)$ と最小値 $g_i^{\min} = \min_{x\in\Delta_i} g(x)$ を持つ。

これらを用いて

$$\begin{aligned} S_n^{\max} &= \sum_{i=0}^{n-1} g_i^{\max}(x_{i+1}-x_i) \\ S_n^{\min} &= \sum_{i=0}^{n-1} g_i^{\min}(x_{i+1}-x_i) \end{aligned}$$

を作ると $S_n^{\min} \le S_n^{\max}$ となる。さて，分割数 n を無限に大きくしていけば，$S_n^{\max}$ も $S_n^{\min}$ も極限値を持ち，これらは一致する。この時この極限値を

$$\lim_{n\to\infty} S_n^{\min} = \lim_{n\to\infty} S_n^{\max} = \int_a^b g(x)dx$$

と書き，区間 $[a,b]$ における $g(x)$ の定積分 (値) と定義したのであった。更にこれは分割の仕方によらず，一意に決定される。

9.3　線積分

さて，ここでもう一度，定積分の記号

$$\int_a^b g(x)dx$$

の意味を考えてみる。上記の定義によれば，$\int_a^b$ は積分区間 $I = [a,b]$ と和の極限を取っているということを表わしており，$g(x)$ は小区間 Δ_i 内における $g(x)$ の値を取っていることを表現しており，最後の dx は小区間の長さ $|\Delta_i x| = x_{i+1} - x_i$ を表わしていて，これはどのように分割してもいい，ということを意味している。

では，I との一対一対応が可能な単純曲線 $\psi(t)$ を x の代わりに使用するとどうなるだろうか？　t についても

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

と同様の分割を行い，これに対して C を含む領域 D で連続な 2 変数関数 $f(x,y) = f(\psi(t))$ に対しても各小区間 $\Delta_i \in \xi_i$ において

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\psi(\xi_i))(\psi(t_{i+1}) - \psi(t_i))$$

の極限値が存在することもある。この時，先の定積分の記号の意味との対応が付くようにすれば，

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(\psi(t))d\psi(t)$$

と書くことが出来る。これを曲線 $C : \psi(t)$ に沿った線積分と呼び，

$$\int_C f(\psi(t))d\psi = \int_a^b f(\psi(t))d\psi(t) \tag{9.1}$$

と書く。

特に，$\psi(t)$ が区間 I において微分可能かつ導関数 $\psi'(t)$ が連続であれば，S_n は

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\psi(\xi_i))\underline{\left(\frac{\psi(t_{i+1}) - \psi(t_i)}{t_{i+1} - t_i}\right)\cdot(t_{i+1} - t_i)}$$

と書けるので，t に関して極限値を取ると下線部は $\psi'(t)dt$ と一致する。従って線積分 (9.1) は

$$\int_C f(\psi(t))d\psi = \int_a^b f(\psi(t))\cdot\psi'(t)dt \tag{9.2}$$

と一致する。実際に線積分を計算する時にはこの (9.2) 式右辺の定積分を求めることになる。

9.4　複素積分

Gauss 平面上における曲線 $C : z(t) = x(t) + y(t)\sqrt{-1}$ も複素積分も線積分 (9.2) として考えることができる。即ち

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))\cdot z'(t)dt \tag{9.3}$$

と定義できる。これを曲線 $C \subset \mathbb{C}$ に沿った積分，あるいは複素積分と呼ぶ。特に C が単純閉曲線の時はこれと区別して

$$\oint_C f(z)\,dz$$

と書くこともある。

練習問題

1. $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ を結ぶ直線は
$$(\beta - \alpha)t + \alpha, \tag{9.4}$$
$\alpha \in C$ を中心とした半径 $r > 0$ の円は
$$\alpha + r\exp\left(\theta\sqrt{-1}\right),\ \theta \in [0, 2\pi] \tag{9.5}$$
と表現できることを示せ。

2. 原点を中心とする Gauss 平面上の半径 1 の円を $C = \{z \mid |z| = 1, z \in \mathbb{C}\}$ とする。これに沿った下記の複素積分の値を求めよ。
   (a) $\int_C \exp(z)dz$
   (b) $\int_C z^2 dz$