なぜ $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1+1}{2+3}=\frac{2}{5}$ は間違いなのか？

幸谷智紀

Version 0.0: 2013-10-11(Fri)

1　初めに

拙著「情報数学の基礎」（森北出版）は，学力不足知力不足体力不足の著者（の一人たるワシ）が書き飛ばして書いているため，色々な不備がある。一番の不備は前書きで，もっといろいろ愚痴りたかったのだが，中途半端な学生批判に終始しており，誠に不満足な出来なのである。面目ない次第である。

もう一つの不備は，毎年講義初回時にネタとしている第 1 章の章末問題 2 (P.19) の解答例である。問題は次の通り。

> 以下の有理数どうしの和の計算は誤っている。
>
> $$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1+1}{2+3}=\frac{2}{5} \tag{1}$$
>
> これに対して「２個の玉の中に白玉が１個，３個の玉の中に白玉が１個，それぞれ存在する。これを合わせると５個の玉の中に２個の白玉が存在することになる。ゆえに，この計算は間違っていない。」という反論がある。この反論は正しいか。

解答例として，巻末 P.147 には

> もし反論が正しいとすると
>
> $$1+1=\frac{1}{1}+\frac{1}{1}=\frac{1+1}{1+1}=\frac{2}{2}=1 \tag{2}$$
>
> となるので，明らかに矛盾が生じる。よって反論は正しくない。

と記してあり，誠にこの説明は「中途半端な上から目線」的であり，聞いた人間のうち

78%（予想）はむかっ腹を立ててこの説明をした人間をブチのめしたくなること請け合いである。世の中には「論理的に正しいというだけでは，共感を込めた真の理解を得られない」ということは沢山あるのであって，それ故にアフガニスタンもシリアも国会もアメリカ議会も日中も日韓もゴタゴタが一向に解決しないのである。

著者としては「字数が足りないのでこういう木で鼻をくくったような文章になってますごめんなさい」と言うしかないのであるが，一応こういう訂正ページを作った以上は字数を言い訳としない長々とした解答例を記しておくのもアフターフォローになるであろうと考えた次第である。もちろんブチのめされたくない，という防衛本能も手伝っている。何せ論理的な回答で納得しない向きにおかれましては暴力に訴えるというどうしようもない方々も結構な割合で含まれているのが世の常なのである。

という駄法螺はともかく，毎年この例を本学の 1 年生に提示してその頓珍漢な解答ぶりをせせら笑いつつ，したり顔で解答例を記しているのだが[*1]，解答を板書しつつも「この説明じゃイマイチだな」と感じるところが多かったのだ。そこで一度は自分なりに納得のいく説明をきちんと書いておこうと，めんどくさい申請書の文章書きに疲れた脳を休めるためにこれを書き始めたのである。ということで，この文章はまごうことなき現実逃避の産物なのである。

2 論理と感情

今でもくすぶっているようであるが，掛け算の順序というのが話題になったことがあった。ワシも詳しくは追っかけていないので，議論の詳細は高橋誠の労作 [1] を読んで理解した程度であるが，仄聞する限り，掛け算の順序の議論は現象と代数系の法則が分離できておらず，ハッキリ言ってイイ歳こいて実数のかけ算の順序に拘る向きはあまり賢くないな，と感じた。ワシも大した頭は持ち合わせていないので，それ故にバカの先輩として言わせてもらうと，こと数学とか自然科学とか論理的な思考が求められる学問の議論では金科玉条のごとく思考を固定するのは百害あって一利なしである。論理的に正しい意見は「そーゆー考え方もあるのか，へ〜」と感心するのが一番勉強になる態度なので，議論の足元を掬われるというのは，合気道の名人にふっとばされたのと同様，良い学習経験なのである。悔しかったらせいぜい「次はワシが吹っ飛ばしてやる！」という学習の動機づけに向けるのが正しい精神のありようである。

[*1] こんなことを言うから毎年アンケードで口が悪いと書かれるのであるが，性格が悪いので仕方がない。多分一生治らない。

それでもやはり「固執する」というのは，「正しいかも知らんがおまえの言い方が気に食わん」という感情に起因するところが大きいのだろう。大体，数学が得意な人間がすべて性格温厚ということでは決してないのはガロアとラプラスとかニュートンとかの例を持ち出すまでもなく自明のことなので，「あんな野郎のあんな言い方に納得するのはプライドが許さん！」という憤るのも無理はない。その感情の原因については理解するが，そんな偏狭な態度を貫いても学問的に良いことは何もない。せいぜいエスパー魔美のパパの如く，憎たらしい言い方をした奴の似顔絵を紙に書いて「てめえこの野郎」と踏み倒す程度で矛を収めるのが良い。丑の刻参りでもいい。ああいう風習は，人形作ったり太い五寸釘を打ち付けたりして肉体を酷使して疲れさせて精神の安定を図るという効果を狙ってのものかもしれないと思う今日この頃である。

なんにせよ，「矛盾がすぐに露呈するようなものは数学と認められない」ものなのである。故に，(1) 式のような計算を考案したとしても，(2) 式のようなぐうの音も出ない矛盾を指摘されたら，素直に「ごめんなさい」と認めるべきものなのである。謝った後でそいつの後ろ髪でも影でも印刷した顔写真でも髪の毛を仕込んだ藁人形でも好きなだけいたぶるが良い。少なくとも一人でやる限りは日本では刑法に触れることはないのだから[*2]。

3 「割合の計算」は「分数の計算（足し算）」に非ず

とはいえ，この説明では，少なくとも小学生以下の子供は納得しないだろう。何せ，

> ２個の玉の中に白玉が１個，３個の玉の中に白玉が１個，それぞれ存在する。これを合わせると５個の玉の中に２個の白玉が存在することになる。

のは厳然たる事実だからだ。「２個のうち１個だから 1/2」，「３個のうちの１個だから 1/3」というのも，極めて分かりやすい説明である。分数の使い方としては間違っていない (と思える)。そして実際，この「５個の玉を集めたら２個は白玉」になるのも正しいのだから

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1+1}{2+3}=\frac{2}{5}$$

と書きたくなる気持ちも分かる。だが，これを認めると (2) のような例を出されて，「へっへーん，バカかお前。じゃあ $1+1=1$ だっていうのか？」と嘲笑されるのがオチである。そっちのほうが感情論としても悔しいでしょ？　だったらちゃんとした説明を考えるべきなのである。

[*2] ということでいいんだっけ？

まず「５個の玉を集めたら２個は白玉」は事実なのだから，これは問題ない。そして「１個の白玉を含む２個の玉のグループ」と「１個の白玉を含む３個の玉のグループ」を合わせたら「$2+3=5$ 個の玉のグループ」ができ，その中には「$1+1=2$ 個の白玉」を含むことはだれしも認めるところだ。つまり

$$\frac{1+1}{2+3}=\frac{2}{5} \tag{3}$$

は「正しい」のである。これは白玉の「割合」を示している分数であり，本質的には食塩水の濃度と同じ計算をしているだけである。

食塩水の問題で言い換えると，例えば次のようなものが考えられる。

> ビーカー A には濃度 50%[*3]の食塩水 50g が入っており，ビーカー B には濃度 $100/3 \approx 33.3\%$ の食塩水 30g が入っている。この二つを合わせてビーカー C に 80g の食塩水を作ると，濃度はどうなるか？

食塩水の濃度 (パーセント) の定義は

$$\frac{\text{食塩の重さ}\ (g)}{\text{食塩水の重さ}\ (g)}\times 100$$

である。従って，ビーカー A の食塩水に含まれる塩分の量は $50/100\times 50=25$(g) であり，ビーカー B の食塩水に含まれる塩分の量は $33.3\cdots/100\times 30=1/3\times 30=10$(g) である。合わせてできるビーカー C の食塩水は $50+30=80$(g) になるので，濃度は

$$\frac{25+10}{50+30}=\frac{35}{80}=\frac{7}{16}$$

となる。つまり $7/16\times 100=175/4=43.75\%$ の濃度の食塩水ということになる。実際，この濃度を用いると，ビーカー C の食塩水には $7/16\times 80=35$(g) の食塩が含まれていることになるので，ビーカー A の食塩水に含まれる食塩の量 25g とビーカー B の食塩水に含まれる食塩の量 10g と合算した食塩の量と一致する。この点，矛盾はない。

先の問題に戻ると，本質的には白玉の問題はこの食塩水の濃度の問題と同じである。白玉の「濃度」＝「割合」を求めていると考えれば，先の計算は「部分的に正しい」ことになる。しかし「全部は正しくない」。肝心なのはこの点だ。

食塩水の問題をこう考えるとどうだろう？

ビーカー A に含まれている食塩の量を食塩水における「割合」で考えると，$25/50=1/2$ となる。これはいいよね？

[*3] そんなものが存在するのかという化学的野暮は聞きたくない。

ビーカーBに含まれている食塩の量を食塩水における「割合」で考えると，$10/30 = 1/3$ となる。これもいいよね？

・・・あれ？　察しのいい人はもう気がついたであろう。

んじゃ，白玉の例のように

$$\frac{25}{50} + \frac{10}{30} = \frac{25+10}{50+30} = \frac{35}{80} = \frac{7}{16}$$

は

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1+1}{2+3} = \frac{2}{5}$$

と同じなの？　違うよね？　どう見ても

$$\frac{7}{16} \neq \frac{2}{5}$$

だよね？ 一体全体どういうことなんだろう？

・・・とまぁ，お詳しい方はこの辺で「背理法により矛盾が生じた。よって前提となっている (1) 式が間違っている。証明終わり！」と言いたくなるだろうが，ワシはバカの味方なので，もう少しねっちり説明したい。背理法ほどバカには理解しがたい証明方法はないのだ。バカなプログラマーが再帰を理解できないのと同様[*4]，バカに説明するにはバカに応じた文字数でねっちり説得する必要があるのだ。ワシはバカの先輩としてバカどもにねっちり説得する義務がある。

ちなみに，解答例 (2) の例に対しては，白玉の例や食塩水の例を使って

> 1個の玉のグループに白玉1個，1個の玉のグループに白玉1個，合わせたら2個の玉のグループが出来て2個とも白玉。だから白玉 100% で割合は1だ！

とか

> ビーカーAに濃度 100% の食塩水[*5]1g，ビーカーBに濃度 100% の食塩水 1g，併せてビーカーCには 2g の濃度 100% の食塩水ができる！　濃度の計算としては $1 + 1 = 1$ だ！

という反論（になってないけど事実としては OK）が可能である。まぁ，言い方に気を付ければこーゆー言い分も使いようはあるかもしれない。しかしまぁ，「分数」の定義をきちんと理解していないなら，止めておくのが得策だろう。

[*4] 岩谷宏が再帰を理解するためのプログラム例を連載で募集していたのを読み，クイックソートを理解できなくて教師にバカ呼ばわりされたワシは涙した。

[*5] そんなもん（以下略)。

さて。

この食塩水と白玉の例から分かるのは，もし (1) を正しいと考えるのであれば，

$$\frac{25}{50}+\frac{10}{30}\neq\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$$

である，という「事実」だ。なんか気持ち悪くないか？　悪くないのであれば良いが，ワシは気持ちが悪い。大いに気持ちが悪い。それなら

$$\frac{25}{50}=\frac{1}{2} \tag{4}$$

とか

$$\frac{10}{30}=\frac{1}{3} \tag{5}$$

すら出来なくなっちゃうではないか。そんな分数計算，めんどくさい。考えたくない。「約分」のできない分数なんて分数じゃない！

そう，つまり (1) の計算は，分数の計算ではない，別の何かの計算なのだ。分数の計算じゃないものを分数の計算と偽って，分数の記号で書くからおかしなことになるのだ。つまり

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\neq\frac{1+1}{2+3}=\frac{2}{5} \tag{6}$$

と考えれば，最左辺の $1/2+1/3$ という「分数の計算 (足し算)」と，真ん中の $(1+1)/(2+3)$ という「割合の計算」が別物だ，ということになって話がすっきりする（した？）。

つまりだ，白玉の「割合の計算」としては

$$\frac{1+1}{2+3}=\frac{2}{5}$$

は「正しい」のだ。

食塩水の濃度，つまり食塩水に含まれる食塩の「割合の計算」としては

$$\frac{25+10}{50+30}=\frac{7}{16}$$

は「正しい」のだ。この二つはあくまで「割合の計算」であって，「分数の計算（足し算)」ではない，別の物なのである。

4　分数ってなんだったっけ？

ここで小学校で習ったことを思い出そう。分数ってなんだっけ？　・・・まぁ当然忘れているよな。忘れているけど，分母の違う分数の足し算は「通分」して

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{3+2}{6}=\frac{5}{6} \tag{7}$$

と計算することは覚えている・・・よね？　覚えていると言ってくれ！　でないと話が先に進まんのである。

通分も約分も本質的には同じもので，分母分子を共通の自然数で割ったり掛けたりするというだけの違いである。これができるというのが分数の特徴である。

対して，先に述べた「割合の計算」ではこれができない。大体，「２個の玉の中に１個の白玉」と「食塩を 25g 含む食塩水 50g」を同一視していはいけないのだ。・・・白玉と食塩水では物が違いすぎるから？　いや違う，そーゆー科学的野暮は数学ではナシにしてほしい。数学では単位とか物質の違いは無視して（無視できるように考えて)，それぞれ「1/2」と「25/50」とゆーよーに数だけを見る。そして，「割合の計算」ではこの二つの数は「違うもの」として扱わねばならない。そうでないと正しい「割合の計算」が成立しなくなるからだ。消費税が 5% から 8% に上がるだけで，つまり +3/100 だけ支払う税金が高くなるだけで怒っている日本国民は何千万人もいるのだ。7/16 − 2/5 =3/80 も「割合の計算」が違えば暴動いや革命が起きてしまう。

約分や通分ができるのが分数の特徴・・・ってことは，約分や通分の意味を考えると，分数の本質が見えてくるはずである。そして，通分して分母を揃えてからでないと足し算や引き算が出来ない「分数の計算」の意味もそこから見えてくるはずである。

「２個の玉の中に１個の白玉」と「25g の食塩を含む食塩水 50g」をテッテ的に問い詰めてみよう。

$1/2 = 25/50$ と考えられる理由は何か？

食塩水や食塩の量をを玉の数とみなせば（数学ではこの手の読み替えはどうとでもなる)，後者は「５０個の玉の中に２５個の白玉」というシチュエーションとなる。そして $1/2 = 25/50$ という「根拠」は，２個の玉も５０個の玉も同じとみなす，つまり「一単位」とみなす，ということである。

「２個」を一単位とみなすのであれば，その中に１個の白玉があれば，「一単位の半分」が白玉ということになる。

「５０個」を一単位とみなすのであれば，その中に２５個の白玉があれば，これもやは

り「一単位の半分」が白玉ということに違いない。

つまり分数の本質は「一単位」となるものを基準とすることにある。だから 1/2 は，二つ足し合わせれば $1/2 + 1/2 = 1$ となるものであり，25/50 も二つ足し合わせば $25/50 + 25/50 = 1$ となるものなので，$1/2 = 25/50$ とみなせるのである。このとき，「分母」とは「一単位とみなす数」であり，「分子が 1 の分数」とは「分母の数だけ足し合わせれば（分母を掛ければ）一単位となる分数」ということができる。

だ，か，ら，だ。

この「分数の定義」に則って白玉の問題に戻ると，

(a)「５個になった玉の中に２個の白玉がある」ということを 2/5 と表現したこと

(b)「２個の玉の中に１個の白玉」を 1/2 と表現したこと

(c)「３個の玉の中に１個の白玉」を 1/3 と表現したこと

は，「個別にみると正しい」が，三つ揃えてみると，「白球一つ分の分数の表現としては相矛盾している」ことになる。つまり「一単位とみなす分母」が，同じ白球一つに対してそれぞれで異なっており，白玉の表現としては不揃いなのである。

もし (a) を基準としてこれを 2/5 と表現するなら，５個が一単位なのだから，白玉１個は２個玉のグループに入っていようと３個玉のグループに入っていようと 1/5 と表現すべきなのだ。だから結果として $1/5 + 1/5 = 2/5$ なのである。

もし (b) を基準としてこれを 1/2 と表現するなら，白玉１個はあくまで 1/2 であり，３個玉のグループの中の１個の白玉も 1/2 なのであって，合計して５個玉のグループになっても，２個が一単位なのだから，$1/2 + 1/2 = 2/2 = 1$ と表現すべきなのだ。

もし (c) を基準としてこれを 1/3 と表現とするなら，白玉１個はあくまで 1/3 であり，２個玉のグループの中の１個の白玉も 1/3 なのであって，合計して５個のグループになっても，３個が一単位なのだから，$1/3 + 1/3 = 2/3$ と表現すべきなのだ。

こう考えれば，白玉の問題は「分数の計算（足し算）」として表現しても何ら矛盾は生じない。

しかし，(b) と (c) の解釈を同時に行って，合計した白玉の数を (7) 式で計算すると・・・何かがおかしい。２個玉グループと３個玉グループを足し合わせる時に，「同じ白玉１個」を 1/2 と 1/3 と全く異なる数として表現すること自体がおかしい。この「正しい分数の計算（足し算）」の意味するところは，$\alpha =$「(一単位が２個）二つ足したら１になるもの」と $\beta =$「三つ足したら１になるもの」を「一単位を６に揃えて加える」ということなので，α

を３等分割，β を２等分割したものは等しくなる，つまり $\alpha/3 = \beta/2 = 1/6$ となるから，

$$\alpha = 3 \times \frac{\alpha}{3} = \frac{3}{6},\ \beta = 2 \times \frac{\beta}{2} = \frac{2}{6}$$

と表現できることになり，$\alpha + \beta = 5/6$ となる。・・・これって，６個玉がある時に５個が白玉って解釈をしなくちゃならなくなる。白玉１個が 1/6 ということなら，３個の全部白玉の３個玉グループと，２個の白玉がある３個玉グループがあって，それを合わせて５個の白玉，全体で６個玉・・・あれれ？　やっぱり３個の白玉は 3/6，２個の白玉は 2/6，どちらのグループに属していようと白玉は白玉なのだから白玉一つは 1/6 と解釈しないとダメだ。そして結局全体としては６個の玉のうち白玉は $3 + 2 = 5$ 個，つまり

$$\frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$$

となる。何にしろ，最初５個玉の白玉問題とは別の代物である。

結局「分数の計算（足し算）」として白玉問題を考えるのであれば，

- 白玉一つは同じ分数として表現する
- 足す前でも後でも玉の総数は変わらない

ということを理解しておかないとダメである。

5　結論

結論をまとめよう。

白玉問題の偽物の等式 (1) は最左辺の $1/2 + 1/3$ という「分数の計算（足し算）」が，白玉問題を正しく表現していない。故に，「割合の計算」とは一致しなくて当たり前である。割合の計算結果と等しくなる分数の計算の表記をするのであれば

$$\overbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{1+1}{5}}^{\text{分数の計算 (足し算) による表現}} = \frac{2}{5} = \underbrace{\frac{1+1}{2+3}}_{\text{割合の計算による表現}}$$

とすべきである。

ついでに言うと，(2) の具体例（P.5）についても同じことが言える。分数の計算として解釈すべき，$1 + 1 = 1/1 + 1/1 = 2$ という計算を，割合の計算 $(1 + 1)/(1 + 1) = 1$ であると強弁しているだけなので，結果として「分数（の計算）を分かってない奴」とバカ

にされてしかるべき代物である。分数の計算として正しく表現したいなら,「2個の玉を $1 = 2/2$ と解釈するなら,白玉1個は $1/2$ と表現すべきなので,それは $1/2 + 1/2 = 1$ というだけのこと」なのであり,「濃度 100% の食塩水*6が 2g あるのなら 1g は $1/2$ と表現すべきで,分数の計算としては $1/2 + 1/2 = 1$」となるだけのことである。強弁は後で恥ずかしい思いをするだけなので,論理的に正しい矛盾の指摘を受けたら,素直に引き下がるべし!

6 終わりに

ところでこの白玉問題は,森毅のもの [2] を読んだのがワシにとっての初耳であった。この問題の「うまい矛盾の提示」のキモは,食塩水の濃度問題を,離散的かつ計算が簡単な白玉問題に置き換えて,分数の計算とインチキ混合させたところにある。

食塩水の濃度問題の場合,個別のビーカーの食塩水の濃度を算出してからその和を計算する,なんてことはしないだろう。第一計算がめんどくさいし,個別のビーカーの食塩の量を算出してからでないと合わせたビーカーの食塩水の濃度の計算が出来ないことは徹底して教えられているはずだからだ。白玉問題の場合,面倒な個別のグループの「割合の計算」がすぐにできるため,オッチョコチョイを誘発しやすくできているのだ。

ちなみに,白玉問題のオリジナルは下記の通りである [2]。

> 実際にある高校生が議論をしたというのですが,うちは二人きょうだいで一人が男の子,隣の家は三人きょうだいで一人が男の子,合わせて五人で男の子二人,だから $1/2 + 1/3 = 2/5$ だという。なんとなく足し算をしているような気分になります。これは普通の足し算とは違いますがある種の足し算もどきではあります。こういうことをいわれると結構動揺し,5/6 派のほうは,学校で教わったはずだという根拠しかないために 2/5 派のほうが勝ったという話です。こういう議論をするのはいいことだと思います。それで分数の足し算とはどういうものかという話になりますから。

最初にこの問題を考え出した高校生は誰なのか? 自分で解決できたのかどうか,結果を知りたいものである。

その後,NHK 教育 (E テレ) で秋山仁がこの白玉問題を解説していたのを見かけたが,分数の定義に従った通り一遍の解説だけで,ちょっと物足りなかった。「バカにも分かる

*6 そもそもこれは食塩そのもので,食塩「水」じゃないよなぁ・・・。

ねっちりした解説がないかしら？」ともやもやを抱えて十数年（かな？），結局自分で書いてしまったが，もう少し「耳触りのいい胃の腑に落ちる名解説」はないものかと思っている。良いものがあれば是非とも解説を乞いたい。

参考文献

[1] 高橋誠,「かけ算には順序があるのか？」岩波科学ライブラリー 180，2011.

[2] 森毅,「NHK 人間大学 数学・文化・人生」NHK 出版, 1993.