第 7 章

有限次元線型空間 $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ おける基底

普段何気なく使っている「座標」というものを，ここでは明確に定義する。我々人間は何かの「物差し」，即ち，基準となる具体的なものがなければ，物を計ることができない。座標とはこの物差しにあたるベクトルの組，即ち「基底」というものが具体的に定められた結果として得られる点の位置，あるいはベクトルのことである。基底と見なせるベクトルの組には「一次（線型）独立」という性質が必要となるが，それ以外の性質は必要としない。それ故に，様々な基底を，その用途に応じて便利なように決定することができる。本章では何気なく使っている普通の意味での「座標」が「標準正規直交基底」によって定義されるものであることを知り，その後，多様な「基底」に触れていくことにする。

7.1 ベクトルのユークリッドノルムと「直交」の概念

n 次元ベクトル $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ において，ユークリッドノルム $\|\mathbf{v}\|$ は内積を用いて

$$\|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{(\mathbf{v}, \mathbf{v})}$$

と記述することもできる。これをベクトルの長さ (length) と呼ぶことにする。

従って，二つの実ベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ が形成する三角形を考えると，この二つのベクトルがなす角を θ(ラジアン[*1]) とすると，余弦定理より

$$\frac{1}{2}\left(-\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_2^2 + \|\mathbf{u}\|_2^2 + \|\mathbf{v}\|_2^2\right) = \|\mathbf{u}\|_2\|\mathbf{v}\|_2 \cos\theta$$

となる。

ここで左辺は

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(-\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|_2^2 + \|\mathbf{u}\|_2^2 + \|\mathbf{v}\|_2^2\right) \\
&\quad = \frac{1}{2}\left(-\sum_{i=1}^{n} |u_i - v_i|^2 + \sum_{i=1}^{n} |u_i|^2 + \sum_{i=1}^{n} |v_i|^2\right) \\
&\quad = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} 2u_i v_i\right) \\
&\quad = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = (\mathbf{u}, \mathbf{v})
\end{aligned}$$

となり，内積 $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ である。従って次の定理が成立する。

[*1] 本書では特に断らない限り角度の単位はラジアン (弧度法) を用いる。

定理 7.1 (内積とノルムの関係式)
任意の $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して，この二つのベクトルがなす角を θ とする時

$$\cos\theta = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{u}\|_2\|\mathbf{v}\|_2} \tag{7.1}$$

が成立する。特に内積が 0 になる時，この二つのベクトルは直交している (orthogonal) と言い，$\theta = \pi/2$ である。

(7.1) 式を利用すると，二つのベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ のなす角 θ を求めることができる。即ち，逆三角関数（アークコサイン）$\cos^{-1} x = \theta$ を用いて

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{u}\|_2\|\mathbf{v}\|_2}\right) \tag{7.2}$$

を計算すればよい。

問題 7.1
$\mathbf{u} = [1\ 2]^T, \mathbf{v} = [2\ 1]^T \in \mathbb{R}^2$ の時，$\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ のなす角 θ を MATLAB を用いて求めよ。なおアークコサインは `acos(x)` 関数を使用すること。

7.2　座標系という考え方と正規直交基底

全ての n 次元ベクトルは n 個の要素，即ち座標値を用いて表現されることは既に示した。これは n 個の標準単位ベクトル

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ \ldots,\ \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

というベクトルを用いて

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} v_i \mathbf{e}_i$$

というように，標準単位ベクトルの和として表現できる。

例えば，$\mathbf{v} = [1\ 2\ 3]^T \in \mathbb{R}^3$ というベクトルは,

$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$$

となる。

この標準単位ベクトルの組 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ は明らかに次の二つの性質，正規性と直交性を持つ。

正規性　長さ（ノルム) が常に 1 である。

$$\|\mathbf{e}_i\|_2 = 1 \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

直交性　異なる単位ベクトルとは必ず直交している。

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

このような性質を持つベクトルの組を正規直交基底 (orthnormal bases) と呼ぶ。

なお，一次独立なベクトルは正規直交基底に変換することが出来る。例えば二つの一次独立なベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ に対して

$$
\begin{aligned}
(\text{正規化})\ \ \mathbf{u} &= \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|_2} = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|_2}\mathbf{a} \\
(\text{直交化})\ \ \mathbf{v}' &= \mathbf{b} - (\mathbf{b}, \mathbf{u})\mathbf{u} \\
(\text{正規化})\ \ \mathbf{v} &= \frac{\mathbf{v}'}{\|\mathbf{v}'\|_2}
\end{aligned} \tag{7.3}
$$

という，正規化 (ノルムを 1 にする) と直交化 (直交ベクトル成分を抜き出す) を行うことで得られるベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ は正規直交基底をなす。

問題 7.2

1. (7.3) によって生成される $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ は正規直交であることを示せ。
2. $\mathbf{a} = [1\ 2]^T, \mathbf{b} = [-2\ \ -1]^T \in \mathbb{R}^2$ である時，この二つのベクトルがなす角 θ を求めよ。また，(7.3) の手順に従って正規直交ベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ を生成せよ。
3. $\mathbf{a} = [1\ 2\ 3]^T, \mathbf{b} = [-3\ \ -2\ \ -1]^T$ の時，この二つのベクトルがなす角 θ を求めよ。また，(7.3) の手順に従って正規直交ベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ を生成せよ。

7.3　標準正規直交基底と座標

既に前章で n 次元線型空間におけるベクトルの定義 (1.6) を述べた。まず簡単に 3 次元空間で具体的にその意味するところを考えてみる。

$\mathbf{v} \in \mathbb{C}^3$ が

$$
\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}
$$

と与えられる時，これはそれぞれ x 座標の値が -1,y 座標の値が 2，z 座標の値が -3 であることを意味している。自然に考えれば，これはそれぞれの座標の値が 1 の所を基準とし，その何倍か？という量として決められた値と考えることができる。

ここで，それぞれの座標における 1 の値をベクトルであるとすると，それぞれ $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ と書けば，それを座標で表現すると

$$
\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

となる。$\mathbf{v}$ をこの $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ のスカラー倍と和で表現すると

$$
\mathbf{v} = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3
$$

となることはすぐに分かる。

このように，n 次元線型空間において，n 個の座標基準値 1 に対応する n 個のベクトルの組 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$

$$
\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\ ...,\ \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

を標準正規直交基底 (standard orthnormal basis) と呼ぶ。これによって任意の $\mathbf{v} = [v_1\ v_2\ \dots\ v_n]^T$ は

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + \cdots + v_n\mathbf{e}_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} v_i\mathbf{e}_i\end{aligned} \tag{7.4}$$

のように，標準正規直交基底 $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ のスカラー倍と和の形で表現できる。

問題 7.3

$\mathbb{C}^4$ における標準正規直交基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ を書き出し，これを用いて (7.4) の形で下記のベクトルを表現せよ。

1. $\mathbf{a} = [4\ \ 3\ \ 2\ \ 1]^T$
2. $\mathbf{b} = [\mathrm{i}\ \ 2+3\mathrm{i}\ \ -4\mathrm{i}\ \ -5+6\mathrm{i}]^{\mathrm{T}}$
3. $\mathbf{c} = [\sqrt{3}\ \ 7\mathrm{i}\ \ -9+3\mathrm{i}\ \ 2]^{\mathrm{T}}$

7.4　様々な基底と基底の取替

標準正規直交基底 $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ は普通の意味での「座標」を決定するための標準的な「定規」である。では，もっと他のベクトルも定規にできないだろうか？

例えば $\mathbb{R}^2$ において，次のようなベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}^2$ を考えてみよう。

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

このベクトルの組 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ を「基底」と見なし，例えば $\mathbf{c} = [3\ 2]^T \in \mathbb{R}^2$ を

$$\mathbf{c} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2$$

と表現できないだろうか？　そのまま $\mathbf{c}$ の値を当てはめれば，$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ は

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

を満足するように決定出来ればよい。実際，この連立一次方程式を解くと $x_1 = 5/2, x_2 = -1/2$ と一意に決定でき，結果として

$$\mathbf{c} = \frac{5}{2}\mathbf{a}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{a}_2$$

と表現できる。即ち，先の標準正規直交基底の例同様，基底が $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ であるという前提条件のもとで，$\mathbf{c}$ は，新たな座標 $\mathbf{c}'$ を持ち

$$\mathbf{c}' = \begin{bmatrix} 5/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

と表現できることになる。

標準正規直交基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ を用いれば，$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ は

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,\ \mathbf{a}_2 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$$

となる。まとめて行列の形で書くと

$$[\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2] = [\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2]\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = I_2T = T$$

と表現できる。ここでできる $T = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2]$ を，標準正規直交基底から基底 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ への変換行列 (transform matrix) と呼ぶ。

先の $\mathbf{c}$ の基底 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ への変換は，この T を用いて

$$T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

という連立一次方程式を解いて得られたものである。逆に考えると，もし変換行列 $T = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2]$ が正則行列でなければ，変換後の座標 x_1, x_2 は一意には決まらない。このように n 次元線型空間における基底とは，変換行列 T が正則でなければならない。このような n 個のベクトルの組を一次（線型）独立 (linear independant) と呼ぶ。

定義 7.1 (基底と一次独立性)
$\mathbb{C}^n$ における n 個のベクトルの組 $\{\mathbf{a}_i\}_{i=1}^n$ から生成される変換行列

$$T = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \dots\ \mathbf{a}_n]$$

が正則である時，$\mathbb{C}^n$ における基底 (basis) と呼び，任意のベクトル $\mathbf{v}$ は新たな座標値 $\mathbf{v}'$ を持ち，連立一次方程式

$$T\mathbf{v}' = \mathbf{v}$$

を解くことで得られる。

問題 7.4
次のベクトル $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ について次の問いに答えよ。必要な計算は MATLAB を用いて行っても良い。

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix},\ \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1. $\mathbf{b}_1$ と $\mathbf{b}_2$ が基底をなすことを示せ。
2. $\{\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2\}$ を基底とする時，ベクトル $\mathbf{w} = [4\ \ -1]^T$ をこの基底ベクトルの線型結合で表わせ。

7.5 【重要】基底と行列の関係のまとめ

以上，今まで学んできた基底と行列の関係をまとめた定理を示す。

定理 7.2 (基底と行列の関係 (1/2))
n 次元ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{C}^n$ に対し，$A = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \cdots\ \mathbf{a}_n] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ とする時，次の条件は全て同値である。

1. $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$ は基底をなす。
2. $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ は一次独立である。
3. $A = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \cdots\ \mathbf{a}_n]$ は正則行列である (A^{-1} が存在する)。
4. $\mathrm{rank}(A) = n$ である。
5. $|A| \neq 0$ である。

上記の拡張として，次の系が成立することは明らかだろう。

定理 7.3 (基底と行列の関係 (2/2))
n 次元ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{C}^n$ に対し，$A = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \cdots\ \mathbf{a}_n] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ とする時，次の条件は全て同値である。

1. $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$ は基底にならない。

2. $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n$ は一次独立ではない（一次従属である）。
3. $A = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \cdots\ \mathbf{a}_n]$ は正則行列ではない (A^{-1} は存在しない)。
4. $\mathrm{rank}(A) < n$ である。
5. $|A| = 0$ である。

どちらの定理にしろ，$\mathrm{rank}(A)$ や $|A|$ は MATLAB で簡単に計算できるので，ベクトル列が基底かどうか（一次独立かどうか）の判断も MATLAB で可能であることが分かる。

問題 7.5

次のベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4 \in \mathbb{R}^4$ の組

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix},\ \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix},\ \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix},\ \mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

について次の問いに答えよ。なお，必要な計算は MATLAB を用いて行っても良い。

1. $\{\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \mathbf{a}_3,\ \mathbf{a}_4\}$ が基底となっていることを示せ。
2. $\mathbf{v} = [3\ \ -3\ \ -5\ 5]^T \in \mathbb{R}^4$ をこの基底を用いて線型結合の形で表現せよ。