# 第 7 章

# 有限次元線型空間おける基底

普段何気なく使っている「座標」というものを，ここでは明確に定義する。我々人間は何かの「物差し」，即ち，基準となる具体的なものがなければ，物を計ることができない。座標とはこの物差しにあたるベクトルの組，即ち「基底」というものが具体的に定められた結果として得られる点の位置，あるいはベクトルのことである。基底と見なせるベクトルの組には「一次（線型）独立」という性質が必要となるが，それ以外の性質は必要としない。それ故に，様々な基底を，その用途に応じて便利なように決定することができる。本章では何気なく使っている普通の意味での「座標」が「標準正規直交基底」によって定義されるものであることを知り，その後，多様な「基底」に触れていくことにする。

## 7.1　ベクトルのユークリッドノルムと「直交」の概念

$n$ 次元ベクトル $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ において，ユークリッドノルム $\|\mathbf{v}\|$ は内積を用いて

$$\|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{(\mathbf{v}, \mathbf{v})}$$

と記述することもできる。これをベクトルの長さ (length) と呼ぶことにする。

従って，二つの実ベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ が形成する三角形を考えると，この二つのベクトルがなす角を $\theta$(ラジアン[*1]) とすると，余弦定理より

$$\frac{1}{2}\left(-\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_2^2 + \|\mathbf{u}\|_2^2 + \|\mathbf{v}\|_2^2\right) = \|\mathbf{u}\|_2\|\mathbf{v}\|_2 \cos\theta$$

となる。

ここで左辺は

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left(-\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|_2^2 + \|\mathbf{u}\|_2^2 + \|\mathbf{v}\|_2^2\right) \\ &\quad = \frac{1}{2}\left(-\sum_{i=1}^{n}|u_i - v_i|^2 + \sum_{i=1}^{n}|u_i|^2 + \sum_{i=1}^{n}|v_i|^2\right) \\ &\quad = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} 2u_i v_i\right) \\ &\quad = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \end{aligned}$$

となり，内積 $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ である。従って次の定理が成立する。

---

[*1] 本書では特に断らない限り角度の単位はラジアン (弧度法) を用いる。

**定理 7.1 (内積とノルムの関係式)**
任意の $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して，この二つのベクトルがなす角を $\theta$ とする時

$$\cos\theta = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{u}\|_2 \|\mathbf{v}\|_2} \tag{7.1}$$

が成立する。特に内積が 0 になる時，この二つのベクトルは直交している (orthogonal) と言い，$\theta = \pi/2$ である。

(7.1) 式を利用すると，二つのベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ のなす角 $\theta$ を求めることができる。即ち，逆三角関数（アークコサイン）$\cos^{-1} x = \theta$ を用いて

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{u}\|_2 \|\mathbf{v}\|_2}\right) \tag{7.2}$$

を計算すればよい。

**問題 7.1**
$\mathbf{u} = [1\ 2]^T, \mathbf{v} = [2\ 1]^T \in \mathbb{R}^2$ の時，$\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ のなす角 $\theta$ を MATLAB を用いて求めよ。なおアークコサインは `acos(x)` 関数を使用すること。

## 7.2 座標系という考え方と正規直交基底

全ての $n$ 次元ベクトルは $n$ 個の要素，即ち座標値を用いて表現されることは既に示した。これは $n$ 個の標準単位ベクトル

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ \ldots,\ \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

というベクトルを用いて

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} v_i \mathbf{e}_i$$

というように，標準単位ベクトルの和として表現できる。

例えば，$\mathbf{v} = [1\ 2\ 3]^T \in \mathbb{R}^3$ というベクトルは，

$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$$

となる。

この標準単位ベクトルの組 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ は明らかに次の二つの性質，正規性と直交性を持つ。

**正規性** 長さ（ノルム) が常に 1 である。

$$\|\mathbf{e}_i\|_2 = 1\ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

**直交性** 異なる単位ベクトルとは必ず直交している。

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

このような性質を持つベクトルの組を正規直交基底 (orthnormal bases) と呼ぶ。

なお，一次独立なベクトルは正規直交基底に変換することが出来る。例えば二つの一次独立なベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ に対して

$$
\begin{aligned}
(\text{正規化})\ \ \mathbf{u} &= \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|_2} = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|_2}\mathbf{a} \\
(\text{直交化})\ \ \mathbf{v}' &= \mathbf{b} - (\mathbf{b}, \mathbf{u})\mathbf{u} \\
(\text{正規化})\ \ \mathbf{v} &= \frac{\mathbf{v}'}{\|\mathbf{v}'\|_2}
\end{aligned}
\tag{7.3}
$$

という，正規化 (ノルムを 1 にする) と直交化 (直交ベクトル成分を抜き出す) を行うことで得られるベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ は正規直交基底をなす。

**問題 7.2**

1. (7.3) によって生成される $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ は正規直交であることを示せ。
2. $\mathbf{a} = [1\ 2]^T$, $\mathbf{b} = [-2\ \ -1]^T \in \mathbb{R}^2$ である時，この二つのベクトルがなす角 $\theta$ を求めよ。また，(7.3) の手順に従って正規直交ベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ を生成せよ。
3. $\mathbf{a} = [1\ 2\ 3]^T$, $\mathbf{b} = [-3\ \ -2\ \ -1]^T$ の時，この二つのベクトルがなす角 $\theta$ を求めよ。また，(7.3) の手順に従って正規直交ベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ を生成せよ。

## 7.3 標準正規直交基底と座標

既に前章で $n$ 次元線型空間におけるベクトルの定義 (1.6) を述べた。まず簡単に 3 次元空間で具体的にその意味するところを考えてみる。

$\mathbf{v} \in \mathbb{C}^3$ が

$$
\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}
$$

と与えられる時，これはそれぞれ $x$ 座標の値が $-1$,$y$ 座標の値が 2，$z$ 座標の値が $-3$ であることを意味している。自然に考えれば，これはそれぞれの座標の値が 1 の所を基準とし，その何倍か？という量として決められた値と考えることができる。

ここで，それぞれの座標における 1 の値をベクトルであるとすると，それぞれ $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ と書けば，それを座標で表現すると

$$
\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

となる。$\mathbf{v}$ をこの $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ のスカラー倍と和で表現すると

$$
\mathbf{v} = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3
$$

となることはすぐに分かる。

このように，$n$ 次元線型空間において，$n$ 個の座標基準値 1 に対応する $n$ 個のベクトルの組 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$

$$
\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\ ...,\ \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

を標準正規直交基底 (standard orthnormal basis) と呼ぶ。これによって任意の $\mathbf{v} = [v_1\ v_2\ ...\ v_n]^T$ は

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + \cdots + v_n\mathbf{e}_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} v_i\mathbf{e}_i \end{aligned} \tag{7.4}$$

のように，標準正規直交基底 $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ のスカラー倍と和の形で表現できる。

**問題 7.3**

$\mathbb{C}^4$ における標準正規直交基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ を書き出し，これを用いて (7.4) の形で下記のベクトルを表現せよ。

1. $\mathbf{a} = [4\ \ 3\ \ 2\ \ 1]^T$
2. $\mathbf{b} = [\mathrm{i}\ \ 2+3\mathrm{i}\ \ -4\mathrm{i}\ \ -5+6\mathrm{i}]^\mathrm{T}$
3. $\mathbf{c} = [\sqrt{3}\ \ 7\mathrm{i}\ \ -9+3\mathrm{i}\ \ 2]^\mathrm{T}$

## 7.4　様々な基底と基底の取替

標準正規直交基底 $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ は普通の意味での「座標」を決定するための標準的な「定規」である。では，もっと他のベクトルも定規にできないだろうか？

例えば $\mathbb{R}^2$ において，次のようなベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}^2$ を考えてみよう。

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

このベクトルの組 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ を「基底」と見なし，例えば $\mathbf{c} = [3\ 2]^T \in \mathbb{R}^2$ を

$$\mathbf{c} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2$$

と表現できないだろうか？　そのまま $\mathbf{c}$ の値を当てはめれば，$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ は

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

を満足するように決定出来ればよい。実際，この連立一次方程式を解くと $x_1 = 5/2, x_2 = -1/2$ と一意に決定でき，結果として

$$\mathbf{c} = -\frac{5}{2}\mathbf{a}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{a}_2$$

と表現できる。即ち，先の標準正規直交基底の例同様，基底が $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ であるという前提条件のもとで，$\mathbf{c}$ は，新たな座標 $\mathbf{c}'$ を持ち

$$\mathbf{c}' = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

と表現できることになる。

標準正規直交基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ を用いれば，$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ は

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,\ \mathbf{a}_2 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$$

となる。まとめて行列の形で書くと

$$[\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2] = [\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2]\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = I_2 T = T$$

と表現できる。ここでできる $T = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2]$ を，標準正規直交基底から基底 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ への変換行列 (transform matrix) と呼ぶ。

先の $\mathbf{c}$ の基底 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ への変換は，この $T$ を用いて

$$T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

という連立一次方程式を解いて得られたものである。逆に考えると，もし変換行列 $T = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2]$ が正則行列でなければ，変換後の座標 $x_1, x_2$ は一意には決まらない。このように $n$ 次元線型空間における基底とは，変換行列 $T$ が正則でなければならない。このような $n$ 個のベクトルの組を一次（線型）独立 (linear independant) と呼ぶ。

**定義 7.1 (基底と一次独立性)**
$\mathbb{C}^n$ における $n$ 個のベクトルの組 $\{\mathbf{a}_i\}_{i=1}^n$ から生成される変換行列

$$T = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \dots\ \mathbf{a}_n]$$

が正則である時，$\mathbb{C}^n$ における基底 (basis) と呼び，任意のベクトル $\mathbf{v}$ は新たな座標値 $\mathbf{v}'$ を持ち，連立一次方程式

$$T\mathbf{v}' = \mathbf{v}$$

を解くことで得られる。

**問題 7.4**
次のベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ の組

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix},\ \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix},\ \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix},\ \mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

が基底となっていることを確認せよ。また $\mathbf{v} = [1\ 2\ 3\ 4]^T$ をこの基底を用いて表現せよ。

## 7.5　線型空間と次元数

既に見てきたように，全ての $n$ 次元ベクトル $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ においてはスカラー倍，ベクトルの加減算が実行でき，結合則，交換則が成立する。このような集合を線型空間 (linear space) と呼ぶ。以下，集合 $\mathbb{K}$ を $\mathbb{C}$ もしくは $\mathbb{R}$ とし，線型空間の定義を厳密に述べる [1]。

**定義 7.2 (線型空間)**
定数 $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{V}$ に対して下記の性質を満足する時，集合 $\mathcal{V}$ を線型空間 (linear space)，もしくはベクトル空間 (vector space) と呼ぶ。また，$\mathbb{K}$ をスカラー集合 (scalar set) と呼ぶ。

1. $V \neq \emptyset$(空集合でない)
2. 加算，スカラー倍に関して閉じている。即ち，全ての $\alpha \in \mathbb{K}, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ に対して，$\alpha\mathbf{a} \in V$, かつ $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in V$ が成り立つ。
3. ベクトルの加算に関して次の性質が成り立つ。
   3-1. 結合則，交換則が成立する。
   3-2. 零ベクトル $0 \in \mathcal{V}$ が存在し，全ての $\mathbf{a} \in \mathcal{V}$ に対して下記が成り立つ。

$$0 + \mathbf{a} = \mathbf{a} + 0 = \mathbf{a}$$

3-3. 任意の $\mathbf{a} \in \mathcal{V}$ に対して逆ベクトル $-\mathbf{a} \in \mathcal{V}$ が存在し，下記が成り立つ。また逆ベクトルとの加算を減算 (subtraction) と呼ぶ。

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = (-\mathbf{a}) + \mathbf{a} = 0$$

4. スカラー倍に関し，任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{K}, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{V}$ に対して下記の性質が成り立つ。
   - 4-1. $(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$
   - 4-2. $\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$
   - 4-3. $(\alpha\beta)\mathbf{a} = \alpha(\beta\mathbf{a})$
   - 4-4. $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$

上記の定義に従えば，$\mathbb{C}^n$ はスカラー集合 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ の時に線型空間となり，$\mathbb{R}^n$ はスカラー集合が $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ の時に線型空間となる。

今までは漠然と $\mathbb{R}^n$ や $\mathbb{C}^n$ における「次元数」という用語を使ってきたが，一般の線型空間における次元数は次のように規定される。

**定義 7.3 (線型空間の次元数)**
線型空間 $\mathcal{V}$ において，一次独立なベクトル $\mathbf{v}_i \in \mathcal{V}$ が高々 $n$ 個しか存在しえない時，この線型空間の次元数を $n$ とし，次のように記する。

$$\dim(\mathcal{V}) = n$$

従って，

全てのベクトルを表現できる基底をなすベクトルの数 = 線型空間の次元数

ということになる。

その他，線型漸化式で規定される無限数列や，ランク落ちの連立一次方程式において解が無限に存在する場合は，その解が線型空間をなす。

**■線型漸化式で規定される無限数列**　数列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ が線型漸化式

$$x_{n+m} := -c_m x_{n+m-1} - c_{m-1} x_{n+m-2} - \cdots - c_1 x_n \ (c_i \in \mathbb{R} \text{ は定数}) \tag{7.5}$$

を満足している時，この漸化式によって定義される数列 $x = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ を要素とする集合 $X_m$ は $m$ 次線型空間となる。実際，任意の $x, y = \{y_n\}_{n=0}^{\infty} \in X_m$ に対して，加算とスカラー倍を

$$x + y = \{x_n + y_n\}_{n=0}^{\infty},\ \alpha x = \{\alpha x_n\}_{n=0}^{\infty}$$

と定義すると，線型空間 (定義 7.2) の性質をすべて満足することが分かる。

**■ランク落ちの連立一次方程式の解がなす線型空間**　例えば

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7.6}$$

というランク落ちの連立一次方程式の解 $\mathbf{x} = [x_1\ x_2]^T \in \mathbb{R}^n$ を考える。この場合，$x_1$ と $x_2$ は

$$3x_1 + 2x_2 = 0$$

という関係式さえ満足していれば，上記の連立一次方程式の解になり得る。従って，$x_1 = s$ と置くことで，$x_2 = -3/2x_1 = -3/2s$ と表現できるので，この解 $\mathbf{x}$ から成る集合 $\mathcal{V}$ は

$$\mathcal{V} = \{\, \mathbf{x} \mid \mathbf{x} = s[1\ \ -3/2]^T,\ s \in \mathbb{R} \,\}$$

となり，線型空間をなす。

同様に

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -3 & -6 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7.7}$$

の解 $\mathbf{y} = [y_1\ y_2\ y_3]^T$ がなす集合 $W$ は $y_1 = s, y_2 = t$ と置くことで

$$\mathcal{W} = \{\, \mathbf{y} \mid \mathbf{y} = s[1\ 0\ -1/3]^T + t[0\ 1\ -2/3]^T,\ s, t \in \mathbb{R} \,\}$$

となり，線型空間をなす。

**問題 7.5**

1. 上記の $\mathcal{V}$，$\mathcal{W}$ が線型空間をなすことを示せ。
2. 次の連立一次方程式の解 $\mathbf{x} = [x_1\ x_2\ x_3]^T \in \mathbb{R}^3$ がなす集合 $\mathcal{V}$ を内包的記法で書け。

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## 7.6　線型部分空間

明らかに $\mathbb{C}^n \supset \mathbb{R}^n$ であり，線型空間でもある。このような場合，$\mathbb{R}^n$ は $\mathbb{C}^n$ の線型部分空間 (linear subspace) であると呼ぶ。

**定義 7.4 (線型部分空間)**
線型空間 $\mathcal{V}$ の部分集合 $\mathcal{S}$ が，同じスカラー集合 $\mathbb{K}$ 上で線型空間となっている時，$\mathcal{S}$ を $\mathcal{V}$ の線型部分集合 (linear subspace) と呼ぶ。

例えば，$\mathbb{R}^2$ は $\mathbb{R}^3$ の線型部分空間である。2 次元ベクトル $\mathbf{v} = [v_1\ v_2]^T$ に対して，$[v_1\ v_2\ 0]^T \in \mathbb{R}^3$ とすれば，$\mathbb{R}^3 \supset \mathbb{R}^2$ と考えられる。

**定理 7.2 (線型部分空間の次元数)**
線型空間 $\mathcal{V}$ の部分集合 $\mathcal{S}$ が，同じスカラー集合 $\mathbb{K}$ 上で線型部分空間となっている時，

$$\dim(\mathcal{S}) \leq \dim(\mathcal{V}) \tag{7.8}$$

となる。つまり，線型部分空間の次元数は，元の線型空間の次元数と同じか，それ未満になる。

他にも，次のような線型部分空間がある。

**■固有空間**　正方行列 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ の固有値 $\lambda$ と固有ベクトル $\mathbf{x}$ に対して，

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}\} \cup \{\, 0 \,\}$$

を，行列 $A$ の (固有値 $\lambda$ に属する) 固有空間 (eigen space) と呼ぶ。固有空間は $\mathbb{C}^n$ の線型部分空間である。

**■ベクトルが張る空間**　$k$ 個のベクトル $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \ldots,\ \mathbf{v}_k \in \mathbb{C}^n$ の全ての線型結合 (linear connection)，即ち，スカラー倍の和 $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{v}_i$ の集合を

$$\mathrm{span}\{\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \ldots,\mathbf{v}_k\} = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{v}_i \ \middle|\ \alpha_i \in \mathbb{C}\ (i = 1, 2, \ldots, k) \right\}$$

と書き，ベクトルが張る空間 (spanning space) と呼ぶ。ベクトルが張る空間は $\mathbb{C}^n$ の線型部分空間になる。

**問題 7.6**

1. (7.6) の解なす線型部分空間 $\mathcal{V}$ と，(7.7) の解がなす $\mathcal{W}$ の次元数 $\dim(\mathcal{V})$ と $\dim(\mathcal{W})$ をそれぞれ求めよ。
2. 次の連立一次方程式の解 $\mathbf{x} = [x_1\ x_2\ x_3]^T \in \mathbb{R}^3$ がなす集合 $\mathcal{V}$ の次元数 $\dim(\mathcal{V})$ を求めよ。

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$