# 第 8 章

# 有限次元線型空間

## 8.1 線型空間と次元数

既に見てきたように，全ての $n$ 次元ベクトル $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ においてはスカラー倍，ベクトルの加減算が実行でき，結合則，交換則が成立する。このような集合を線型空間 (linear space) と呼ぶ。以下，集合 $\mathbb{K}$ を $\mathbb{C}$ もしくは $\mathbb{R}$ とし，線型空間の定義を厳密に述べる [1]。

**定義 8.1 (線型空間)**
定数 $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{V}$ に対して下記の性質を満足する時，集合 $\mathcal{V}$ を $\mathbb{K}$ 上の線型空間 (linear space)，もしくはベクトル空間 (vector space) と呼ぶ。また，$\mathbb{K}$ をスカラー集合 (scalar set) と呼ぶ。

1. $\mathcal{V} \neq \emptyset$(空集合でない)
2. 加算，スカラー倍に関して閉じている。即ち，全ての $\alpha \in \mathbb{K}, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{V}$ に対して，$\alpha\mathbf{a} \in \mathcal{V}$, かつ $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in \mathcal{V}$ が成り立つ。
3. ベクトルの加算に関して次の性質が成り立つ。
   3-1. 結合則，交換則が成立する。
   3-2. 零ベクトル $0 \in \mathcal{V}$ が存在し，全ての $\mathbf{a} \in \mathcal{V}$ に対して下記が成り立つ。
   $$0 + \mathbf{a} = \mathbf{a} + 0 = \mathbf{a}$$
   3-3. 任意の $\mathbf{a} \in \mathcal{V}$ に対して逆ベクトル $-\mathbf{a} \in \mathcal{V}$ が存在し，下記が成り立つ。また逆ベクトルとの加算を減算 (subtraction) と呼ぶ。
   $$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = (-\mathbf{a}) + \mathbf{a} = 0$$
4. スカラー倍に関し，任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{K}, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{V}$ に対して下記の性質が成り立つ。
   4-1. $(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$
   4-2. $\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$
   4-3. $(\alpha\beta)\mathbf{a} = \alpha(\beta\mathbf{a})$
   4-4. $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$

上記の定義に従えば，$\mathbb{C}^n$ はスカラー集合 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ の時に線型空間となり，$\mathbb{R}^n$ はスカラー集合が $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ の時に線型空間となる。

今までは漠然と $\mathbb{R}^n$ や $\mathbb{C}^n$ における「次元数」という用語を使ってきたが，一般の線型空間における次元数は次のように規定される。

**定義 8.2 (線型空間の次元数)**
線型空間 $\mathcal{V}$ において，一次独立なベクトル $\mathbf{v}_i \in \mathcal{V}$ が高々 $n$ 個しか存在しえない時，この線型空間の次元数を $n$ とし，

次のように記する。

$$\dim(\mathcal{V}) = n$$

従って，

**全てのベクトルを表現できる基底をなすベクトルの数 = 線型空間の次元数**

ということになる。

その他，線型漸化式で規定される無限数列や，ランク落ちの連立一次方程式において解が無限に存在する場合は，その解が線型空間をなす。

### 8.1.1　線型空間の例 (1): ランク落ちの連立一次方程式の解がなす線型空間

例えば

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{8.1}$$

というランク落ちの連立一次方程式の解 $\mathbf{x} = [x_1\ x_2]^T \in \mathbb{R}^n$ を考える。この場合，$x_1$ と $x_2$ は

$$3x_1 + 2x_2 = 0$$

という関係式さえ満足していれば，上記の連立一次方程式の解になり得る。従って，$x_1 = s$ と置くことで，$x_2 = -3/2x_1 = -3/2s$ と表現できるので，この解 $\mathbf{x}$ から成る集合 $\mathcal{V}$ は

$$\mathcal{V} = \{\, \mathbf{x} \mid \mathbf{x} = s[1\ \ -3/2]^T,\ s \in \mathbb{R} \,\}$$

となり，$\mathcal{V}$ は定義 8.1 を満足する 1 次元の線型空間をなす。

同様に

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -3 & -6 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{8.2}$$

の解 $\mathbf{y} = [y_1\ y_2\ y_3]^T$ がなす集合 $W$ は $y_1 = s, y_2 = t$ と置くことで

$$\mathcal{W} = \{\, \mathbf{y} \mid \mathbf{y} = s[1\ 0\ \ -1/3]^T + t[0\ 1\ \ -2/3]^T,\ s, t \in \mathbb{R} \,\}$$

となり，$\mathcal{W}$ は定義 8.1 を満足する 2 次元の線型空間をなす。

**問題 8.1**

1. 上記の $\mathcal{V}$，$\mathcal{W}$ が線型空間をなすことを示せ。
2. 次の連立一次方程式の解 $\mathbf{x} = [x_1\ x_2\ x_3]^T \in \mathbb{R}^3$ がなす集合 $\mathcal{X}$ を内包的記法で書け。また，この $\mathcal{X}$ は何次元の線型空間かも答えよ。

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

### 8.1.2　線型空間の例 (2): 線型漸化式で規定される無限数列

数列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ が線型漸化式

$$x_{n+m} := -c_m x_{n+m-1} - c_{m-1} x_{n+m-2} - \cdots - c_1 x_n \ (c_i \in \mathbb{R}\ \text{は定数}) \tag{8.3}$$

を満足している時，この漸化式によって定義される数列 $x = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ を要素とする集合 $X_m$ は $m$ 次線型空間となる。実際，任意の $x, y = \{y_n\}_{n=0}^{\infty} \in X_m$ に対して，加算とスカラー倍を

$$x + y = \{x_n + y_n\}_{n=0}^{\infty},\ \alpha x = \{\alpha x_n\}_{n=0}^{\infty}$$

と定義すると，線型空間 (定義 8.1) の性質をすべて満足することが分かる。

**問題 8.2**
数列 $x = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ と $y = \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ がそれぞれ漸化式

$$x_{n+2} := x_{n+1} + x_n,\ y_{n+2} := y_{n+1} - y_n$$

から定義されるものとする。この時，次の問いに答えよ。

1. $w = 3x$ である時，$w = \{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ の漸化式を $w_{n+2}, w_{n+1}, w_n$ を用いて表わせ。
2. $z = x + y$ である時，$z = \{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ の漸化式を $z_{n+2}, z_{n+1}, z_n$ を用いて表わせ。

## 8.2　線型写像 (線型変換) と同型写像

結論から言うと，$\mathbb{C}^n$ のベクトルに対する行列乗算は全て下記に述べる線型変換（線型写像) であり，全て $\mathbb{K}$ 上の有限次元線型空間における線型変換は，同型写像によって，行列乗算と同一視できる。ここでは線型写像と線型変換，そして同型写像の定義を述べ，最後に同型写像の例を示し，有限次元線型空間の同型性を具体例を通じて解説する。

**定義 8.3 (線型写像)**
$\mathbb{K}$ 上の線型空間 $\mathcal{V}$ と，$\mathbb{K}$ 上の線型空間 $\mathcal{W}$ の間の写像 $T : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ が次の性質を持つ時，線型写像 (linear mapping) と呼ぶ。

1. 任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$ に対し，$T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y}) \in \mathcal{W}$ が成立する。
2. 任意の $\alpha \in \mathbb{K}$ に対し，$T(\alpha\mathbf{x}) = \alpha T(\mathbf{x}) \in \mathcal{W}$ が成立する。

特に $\mathcal{V} = \mathcal{W}$ である時，$T$ を線型変換 (linear transformation) と呼ぶ。$\mathcal{V} = \mathbb{C}^n$ の時，全ての線型変換は $n$ 次正方行列とベクトルの乗算として定義できる。実際，ベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{C}^n$ と行列 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ の積に対しては

$$\begin{aligned} A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= A\mathbf{x} + A\mathbf{y} \\ A(\alpha\mathbf{x}) &= \alpha(A\mathbf{x}) \end{aligned} \tag{8.4}$$

が成立する。

**定義 8.4 (同型写像と同型)**
$\mathbb{K}$ 上の線型空間 $\mathcal{V}$ と，$\mathbb{K}$ 上の線型空間 $\mathcal{W}$ の間の線型写像 $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ が全単射である時，これを同型写像 (isomorphism) と呼び，同型写像が存在する線型空間は同型 (isomorphic) と呼ぶ。

有限次元線型空間はすべて同じ次元数の $\mathbb{R}^n$ もしくは $\mathbb{C}^n$ と同型である。

以上をまとめると，有限次元線型空間における線型写像 $T$ は次の定理のように，必ず行列乗算の形で表現することができる。

**定理 8.1 (線型空間における線型写像の行列表現)**
$\mathbb{K}$ 上の線型空間 $\mathcal{V}$ の $\mathbf{C}^n$ との同型写像を $\varphi : \mathcal{V} \to \mathbb{C}^n$，$\mathbb{K}$ 上の線型空間 $\mathcal{W}$ と $\mathbf{C}^m$ との同型写像を $\phi : \mathcal{W} \to \mathbb{C}^m$ とす

る。この時，線型写像 $T : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ には対応する行列 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ が存在し，下記の図のように，

$$\begin{array}{ccc} v \in \mathcal{V} & \longrightarrow T \longrightarrow & \phi^{-1}(A\varphi(v)) \in \mathcal{W} \\ \downarrow & & \uparrow \\ \varphi & & \phi^{-1} \\ \downarrow & & \uparrow \\ \varphi(v) \in \mathbb{C}^n & \longrightarrow A \longrightarrow & A\varphi(v) \in \mathbb{C}^m \end{array} \tag{8.5}$$

任意の $v \in \mathcal{V}$ に対し

$$T(v) = \phi^{-1}(A\varphi(v)) \tag{8.6}$$

と表現できる。この時，$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ を $T$ の表現行列と呼ぶ。

**問題 8.3**
線型漸化式 (8.3) の場合，最初の $m$ 個の数列値 $x_0, ..., x_{m-1} \in \mathbb{R}$ の値が決まれば次の $x_m$ が決まることから，$\varphi : x \to \mathbb{R}^m$ を

$$\varphi(\{x_0, x_1, ..., x_{m-1}\}) = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{m-1} \end{bmatrix} \tag{8.7}$$

とすれば，異なる $m$ 個の数列値に対して，以降の数列値が必ず一つ定まり，全ての値が異なることも保証できるので，一対一対応が存在し，最初の $m$ 個の値だけで良いことから，全ての $\mathbb{R}^m$ に対して数列が存在していることも分かる。よって $\varphi$ は全単射であり，$\varphi : X_m \to \mathbb{R}^m$ は同型写像になるので，$X_m$ と $\mathbb{R}^m$ は同型である。この時次の問いに答えよ。

1. $X_m$ 上のシフト演算 $T : X_m \to X_m$ を

   $$T(\{x_0, x_1, ..., x_{m-1}, ...\}) = \{x_1, x_2, ..., x_m, ...\}$$

   と定義する時，これが線型変換であることを示せ。
2. この線型変換の表現行列 $A$ を求めよ。

## 8.3　線型部分空間

明らかに $\mathbb{C}^n \supset \mathbb{R}^n$ であり，線型空間でもある。このような場合，$\mathbb{R}^n$ は $\mathbb{C}^n$ の線型部分空間 (linear subspace) であると呼ぶ。

**定義 8.5 (線型部分空間)**
線型空間 $\mathcal{V}$ の部分集合 $\mathcal{S}$ が，同じスカラー集合 $\mathbb{K}$ 上で線型空間となっている時，$\mathcal{S}$ を $\mathcal{V}$ の線型部分集合 (linear subspace) と呼ぶ。

例えば，$\mathbb{R}^2$ は $\mathbb{R}^3$ の線型部分空間である。2 次元ベクトル $\mathbf{v} = [v_1\ v_2]^T$ に対して，$[v_1\ v_2\ 0]^T \in \mathbb{R}^3$ とすれば，$\mathbb{R}^3 \supset \mathbb{R}^2$ と考えられる。

**定理 8.2 (線型部分空間の次元数)**
線型空間 $\mathcal{V}$ の部分集合 $\mathcal{S}$ が，同じスカラー集合 $\mathbb{K}$ 上で線型部分空間となっている時，

$$\dim(\mathcal{S}) \leq \dim(\mathcal{V}) \tag{8.8}$$

となる。つまり，線型部分空間の次元数は，元の線型空間の次元数と同じか，それ未満になる。

他にも，次のような線型部分空間がある。

**■ランク落ちの連立一次方程式の解がなす線型部分空間**　例えば，(8.1) 式を満足する解がなす線型空間 $\mathcal{V}$ は $\mathbb{R}^2$ の線型部分空間であり，次元数は 1 である。

また，(8.2) 式を満足する解がなす線型空間 $\mathcal{W}$ は $\mathbb{R}^3$ の線型部分空間であり，次元数は 2 である。

**■固有空間**　正方行列 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ の固有値 $\lambda$ と固有ベクトル $\mathbf{x}$ に対して，

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}\} \cup \{ 0 \}$$

を，行列 $A$ の (固有値 $\lambda$ に属する) 固有空間 (eigen space) と呼ぶ。固有空間は $\mathbb{C}^n$ の線型部分空間であり，ランク落ちの連立一次方程式がなす線型部分空間の一種である。

**■ベクトルが張る空間**　$k$ 個のベクトル $\mathbf{v}_1$，$\mathbf{v}_2$，...，$\mathbf{v}_k \in \mathbb{C}^n$ の全ての線型結合 (linear connection)，即ち，スカラー倍の和 $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{v}_i$ の集合を

$$\mathrm{span}\{\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ ...,\mathbf{v}_k\} = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{v}_i \ \middle|\ \alpha_i \in \mathbb{C}\ (i = 1, 2, ..., k) \right\}$$

と書き，ベクトルが張る空間 (spanning space) と呼ぶ。ベクトルが張る空間は $\mathbb{C}^n$ の線型部分空間になる。

**問題 8.4**

1. (8.1) の解なす線型部分空間 $\mathcal{V}$ と，(8.2) の解がなす $\mathcal{W}$ の次元数 $\dim(\mathcal{V})$ と $\dim(\mathcal{W})$ をそれぞれ求めよ。
2. 次の連立一次方程式の解 $\mathbf{x} = [x_1\ x_2\ x_3]^T \in \mathbb{R}^3$ がなす集合 $\mathcal{V}$ の次元数 $\dim(\mathcal{V})$ を求めよ。

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$