第 12 章

線型常微分方程式と解の安定性 (1/3)

本章では今まで学習してきた線型計算の手法を応用するための事例として，線型常微分方程式の初期値問題を取り上げる。常微分方程式の理論については専門の書籍に譲ることにするが，線型常微分方程式は行列とベクトルだけで構成され，解析解（真の解）を直接計算できるもので，今まで学んできた行列とベクトルの基本計算や連立一次方程式，固有値計算を組み合わせることで得ることができる。復習も兼ねて取り組んでほしい。

12.1 常微分方程式の初期値問題

常微分 (ordinary diffrerential) とは，一変数関数の導関数（を求めること）を意味する。従って，常微分方程式 (ordinary differential equation, ODE) とは，「一変数関数を未知変数とする方程式」のことを意味する。この節では，大雑把に常微分方程式の初期値問題の定義と例を示し，MATLAB が提供する ODE ソルバーの使い方も示す。

12.1.1 1 次元常微分方程式の初期値問題

例えば

$$y = \exp(-x^2) = e^{-x^2} \tag{12.1}$$

という一変数関数があったとする。ここで $x \in \mathbb{R}$ は独立変数である。この関数の導関数 $y' = dy/dx$ を求めると

$$\frac{dy}{dx} = -2x\exp(-x^2)$$

となる。右辺において $y = \exp(-x^2)$ という関係を使って y を当てはめると

$$\frac{dy}{dx} = -2xy \tag{12.2}$$

となる。このような関係式が成り立つ一変数関数を解 y とする方程式を常微分方程式（常微分は一変数関数の導関数を求める操作のこと）と呼ぶ。

従って，この場合，常微分方程式 (12.2) の解 (関数) は (12.1) となるが，正確に言うと，無数の解（一般解)

$$y = C\exp(-x^2)\ (C \in \mathbb{R}) \tag{12.3}$$

の一つ，即ち特殊解 ($C = 1$) に過ぎない。もし (12.1) が唯一の解であると主張したいのであれば，解が満足する追加の条件として，例えば

$$y(0) = 1 \tag{12.4}$$

というものが必要である。この時，$C\exp(0) = C = 1$ となり，積分定数 C は一つに固定される。

```
% 常微分方程式の右辺の定義
f = @(x, y) -2 * x * y;

% ソルバーで数値的に解く
% 積分区間 : [0, 10]
[xn, yn] = ode45(f, [0, 10], 1);

% 解析解
x = linspace(0, 10, 100);
y = exp(-x.^2);

% グラフに描画
plot(x, y, 'b-', xn, yn, 'ro');
xlabel('x');
ylabel('y');
legend('解析解', '数値解');
```

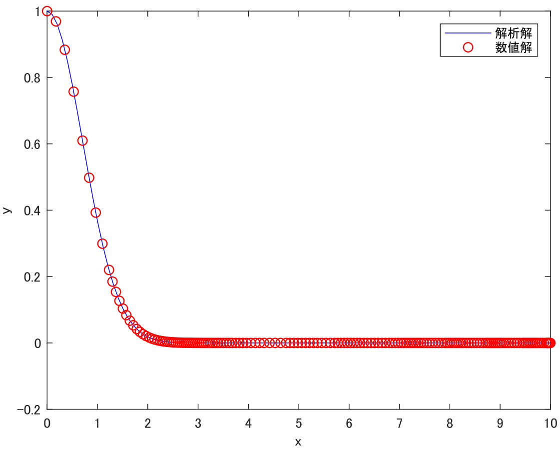

図 12.1　(12.5) 式に対する MATLAB スクリプト (左) と解析解・近似解のグラフ (右)

このタイプの追加条件を初期値と呼び，常微分方程式 (12.2) と初期条件 (12.4) をセットにした

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} &= -2xy \\ y(0) &= 0 \end{cases} \tag{12.5}$$

を，常微分方程式の初期値問題と呼ぶ。解析的に求めた $y(x) = \exp(-x^2)$ を解析解と呼び，近似的に，例えば MATLAB のようなソフトウェアを使って求めた解を数値解と呼ぶ。例えば，積分区間を $[0, 10]$ とした時，(12.5) の数値解 (○印でプロット) と解析解 (曲線) を MATLAB で求めてグラフにするスクリプトは図 12.1 の左図のようになる。

ちなみに，

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} &= g(x)y \\ y(0) &= y_0 \end{cases} \tag{12.6}$$

というタイプの問題の場合を変数分離系と呼び，y を左辺に移行して両辺を x で積分することにより，解析解

$$\log|y| = \int g(x)dx \Longrightarrow y(x) = y_0 \exp\left(\int_0^x g(t)dt\right)$$

を得ることができる。

問題 12.1

下記の常微分方程式の初期値問題について，解析解を求め，近似解と共にグラフとして表現せよ。

(1)

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} &= (\sin x)y \\ y(0) &= \exp(-1) = \dfrac{1}{e} \end{cases}$$

(2)

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dfrac{dy}{dx} & = & -x^2 y \\ y(0) & = & 1\end{array}\right.$$

12.1.2 多次元常微分方程式の解

一般の常微分方程式の初期値問題は，n 次元ベクトル関数 $\mathbf{y}(x)$ に対して，$x, \mathbf{y}(= \mathbf{y}(x))$ を引数として持つ多変数 n 次元ベクトル関数 $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ を用いて次のように定義される

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dfrac{d\mathbf{y}}{dx} & = & \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(x_0) & = & \mathbf{y}_0\end{array}\right. \tag{12.7}$$

例えば 2 次元問題の場合，ベクトルは 2 つの要素を持つので，$\mathbf{y} = [y_1\ y_2]^T$，$\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) = [f_1(x, y_1, y_2), f_2(x, y_1, y_2)]^T$ と記述されるので，(12.7) 式は次のように記述できる。

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dfrac{d}{dx}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} f_1(x, y_1, y_2) \\ f_2(x, y_1, y_2) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\end{array}\right. \tag{12.8}$$

■MATLAB の ODE ソルバーの使い方　下記の具体例に対して，MATLAB の ODE ソルバーを適用してみる。本書では説明を省くが，ODE ソルバーは近似解を数値として求めるものなので，解析解とのズレが発生するものと理解しておくこと。

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dfrac{d}{dx}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} y_2 \\ y_1 y_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\end{array}\right. \tag{12.9}$$

積分区間を $x \in [0, 10]$ として ode45 ソルバー (標準的な ODE ソルバー) を適用したものが図 12.2 である。左に MATLAB スクリプトを，右に近似解を描画した $x - y$ グラフを示している。

```
% 初期条件
y0 = [1; -1];

% ソルバーで数値的に解く
[xn, yn] = ode45(@f, [0, 1], y0)

% グラフに描画
plot(xn, yn(:, 1), 'o', xn, yn(:, 2), 'x');
xlabel('x');
ylabel('y');
legend('y_1', 'y_2');

% 常微分方程式の右辺の定義
function dydx = f(x, y)
    dydx = [y(1); y(1) * y(2)];
end
```

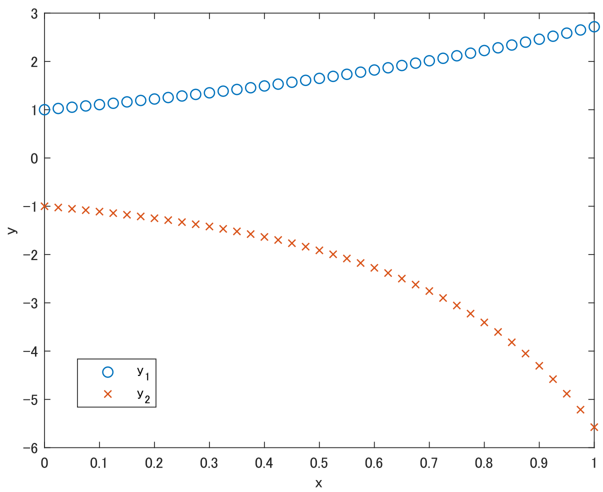

図 12.2　(12.9) 式に対する MATLAB スクリプト (左) と解析解・近似解のグラフ (右)

第 13 章

線型常微分方程式と解の安定性 (2/3)

13.1 多次元常微分方程式と解の一意性

一般の n 次元常微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{y}}{dx} & = & \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(x_0) & = & \mathbf{y}_0 \end{cases} \tag{13.1}$$

に対して，唯一の解 $\mathbf{y} = \mathbf{y}(x)$ を持つ条件は，ある定数 L(Lipschitz 定数と呼ぶ) が存在し，ある区間内の全ての x と，任意の n 次元ベクトル $\mathbf{z}, \mathbf{w}$ に対して

$$\|\mathbf{f}(x, \mathbf{z}) - \mathbf{f}(x, \mathbf{w})\| \leq L\|\mathbf{z} - \mathbf{w}\| \tag{13.2}$$

が満足されることである。 これを Lipschitz 条件と呼ぶ。

問題 13.1

1. 1 次元常微分方程式の初期値問題 (12.5) が Lipschitz 条件 (13.2) を満足することを示せ。また Lipschitz 定数 L を求めよ。
2. (13.8) の解が (13.9) であることを確認せよ。

13.2 定係数線型常微分方程式の初期値問題

n 次実正方行列 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ が与えられているとき，n 次元常微分方程式の初期値問題 (12.7) の右辺が

$$\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) = A\mathbf{y}$$

で与えられているとき，斉次線型常微分方程式と呼ぶ。簡単のため，初期値を $x_0 = 0$ に限定して考える。

定義 13.1 (斉次線型常微分方程式の初期値問題)
n 次実正方行列 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ を用いて定義される常微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{y}}{dx} & = & A\mathbf{y} \\ \mathbf{y}(0) & = & \mathbf{y}_0 \end{cases} \tag{13.3}$$

を斉次線型常微分方程式の初期値問題と呼ぶ。

斉次線型常微分方程式の初期値問題 (13.3) の解 $\mathbf{y}(x)$ は次のように表現できる。行列指数関数

$$\exp(xA) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(xA)^i}{i!} = I_n + xA + \frac{x^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{x^m}{m!}A^m + \cdots \tag{13.4}$$

を用いると，解析解 $\mathbf{y}(x)$ は

$$\mathbf{y}(x) = \exp(xA)\mathbf{y}_0 \tag{13.5}$$

となる。MATLAB には行列指数関数の値を求めるための `expm(A)` 関数があるが，ここではその具体的な計算方法を示し，これに則って解析解を導出していくことにする。

既に述べてきたように，一般の正方行列 A は対角化できる場合とできない場合がある。ここでは対角化できる場合のみを考え，実際に行列指数関数 (13.4) を計算する方法を考える。この時，相似変換行列 V によって行列 A は

$$V^{-1}AV = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

となる。ここで λ_i $(i = 1, 2, ..., n)$ は A の固有値，$V = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \cdots\ \mathbf{v}_n] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ は A の固有ベクトルである。

このような関係が成立する時，(13.3) の解 $\mathbf{y}(x)$ は次のように計算できる。

$$\mathbf{z} = V^{-1}\mathbf{y}$$

と置くと，$d\mathbf{z}/dx = V^{-1}d\mathbf{y}/dx$ となる。(13.3) の常微分方程式に右から V^{-1} を掛けて

$$V^{-1}\frac{d\mathbf{y}}{dx} = V^{-1}A\mathbf{y}$$

となるが，$\mathbf{y} = V\mathbf{z}$ かつ $d\mathbf{y}/dx = Vd\mathbf{z}/dx$ となることから，$\mathbf{y}$ を置き換えると

$$\frac{d\mathbf{z}}{dx} = V^{-1}AV\mathbf{z} = \Lambda\mathbf{z}$$

を得る。この時，初期値は $V^{-1}\mathbf{y}_0 = \mathbf{z}_0$ となる。従って，

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{d\mathbf{z}}{dx} & = & \Lambda\mathbf{z} \\ \mathbf{z}(0) & = & \mathbf{z}_0 \end{array} \right. \tag{13.6}$$

を解けばよい。この場合，要素ごとに書き下してみると

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{dz_i}{dx} & = & \lambda_i z_i \\ z_i(0) & = & z_i^{(0)} \end{array} \right. \quad (i = 1, 2, ..., n) \tag{13.7}$$

という変数分離系になるので，解は $z_i(x) = z_i^{(0)}\exp(\lambda_i x)$ となる。よって

$$\mathbf{y}(x) = V\mathbf{z}(x) = V\begin{bmatrix} z_1^{(0)}\exp(\lambda_1 x) \\ z_2^{(0)}\exp(\lambda_2 x) \\ \vdots \\ z_n^{(0)}\exp(\lambda_n x) \end{bmatrix}$$

を得る。

以上をまとめると，対角化可能な $V^{-1}AV = \Lambda$ を持つ斉次線型常微分方程式の初期値問題 (13.3) は次の手順で解析解 $\mathbf{y}(x)$ を得ることができる。

1. A の固有値，固有ベクトルを求め，Λ, V を得る。
2. 連立一次方程式 $V\mathbf{z}_0 = \mathbf{y}_0$ を $\mathbf{z}_0$ について解く。

3. $\mathbf{z}(x) := [z_1^{(0)} \exp(\lambda_1 x)\, z_2^{(0)} \exp(\lambda_2 x) \ldots z_n^{(0)} \exp(\lambda_n x)]^T$ を求める。
4. $\mathbf{y}(x) := V\mathbf{z}(x)$ を計算して求める。

では具体例で考えてみよう。次のような常微分方程式を考えてみる。

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{d}{dx}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 2y_1 + y_2 \\ y_1 + 2y_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} \right. \tag{13.8}$$

この場合，係数行列 A は

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

となる。

この時，A の固有値は $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$ となり，それぞれの固有値に対応する固有ベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ は，例えば

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

となる。この時，$V = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2]$ とおくと

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},\ V^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

となる。よって初期値は

$$\mathbf{z}_0 = V^{-1}\mathbf{y}_0 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

となる。

従って

$$\begin{bmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot \exp(3x) \\ 0 \cdot \exp(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(3x) \\ 0 \end{bmatrix}$$

となるので，

$$\mathbf{y}(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{bmatrix} = V\mathbf{z}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \exp(3x) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(3x) \\ \exp(3x) \end{bmatrix} \tag{13.9}$$

を得る。

問題 13.2

1. 上記の手順を MATLAB を用いて行ってみよ。具体期には，行列 A, 初期条件 $\mathbf{y}_0$，積分区間を $x = [0, 1]$ を

```
% 常微分方程式を構成する A，y0，積分区間 x をセット
A = [2, 1; 1, 2]
y0 = [1; 1]
x = linspace(0, 1, 10) % [0, 1] を 10 分割
```

   のようにセットしたのち，対角化の結果得られる Λ, V を `eig` 関数を使って求め，$\mathbf{z}_0 := V^{-1}\mathbf{y}_0$ から $\mathbf{z}(x) = [z_1^{(0)} \exp(\lambda_1 x)\, z_2^{(0)} \exp(\lambda_2 x]^T$ を求め，最後に $\mathbf{y}(x) := V\mathbf{z}(x)$ とすればよい。

2. 次の 2 次元定係数常微分方程式の初期値問題の解析解 $\mathbf{y}(x)$ を上記の手順に従って求めよ。

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{d}{dx}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 3y_1 - y_2 \\ -y_1 + 2y_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

第 14 章

線型常微分方程式と解の安定性 (3/3)

14.1　定係数線型常微分方程式の安定性

常微分方程式は様々な数理モデルで使用されるが，今まで見てきた通り，MATLAB のようなソフトウェアを使うことで，有限の積分区間における近似解を得ることは容易い。しかし，未来永劫に渡って，即ち，$\lim_{x\to\infty} \mathbf{y}(x)$ の場合はどうなるか？・・・と考えることで，常微分方程式の解が発散するのか，収束するのか，振動するのか，という長期的な振る舞い，即ち解の「安定性 (stability)」を予測することが出来るようになる。特に，線型常微分方程式の場合は，行列 A の固有値によってその予測が可能となることが知られており，一般の常微分方程式の安定性解析の基礎となる。本章の最後に，2 次元の場合の線型常微分法廷指摘の安定性について調べることにする。

14.1.1　1 次元の場合

最も簡単な線型常微分方程式は下記のような 1 次元問題である。

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{dy}{dx} & = & \alpha y \\ y(0) & = & y_0 \end{array} \right. \tag{14.1}$$

この場合，解析解は既に見てきたように $y(x) = y_0 \exp(\alpha x)$ であるから，$\lim_{x\to\infty} y(x)$ については，α の値によって，図 14.1 のように 3 種類に分類されることが分かる。

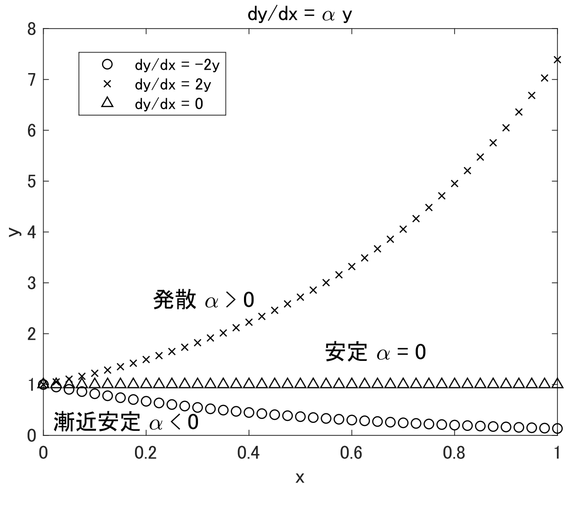

図 14.1　1 次元線型常微分方程式の解の安定性

14.1.2　2 次元の場合

(13.3) 式において

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

となる。この固有値が $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ となり，対角化可能であるとすると，すでに述べた通り，解析解は $\mathbf{z}_0 := [z_1^{(0)}\ z_2^{(0)}]^T = V^{-1}\mathbf{y}_0$ より

$$\mathbf{y}(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{bmatrix} = V \begin{bmatrix} z_1^{(0)} \exp(\lambda_1 x) \\ z_2^{(0)} \exp(\lambda_2 x) \end{bmatrix} \tag{14.2}$$

となる。$\mathbf{z}_0$ は定数ベクトルなので，安定性は $\exp(\lambda_1 x)$ と $\exp(\lambda_2 x)$ 次第となる。固有値が実数の場合はいいとして，複素数になることもあるので，その場合は $\lambda = \mathrm{Re}(\lambda) + \mathrm{Im}(\lambda)\mathrm{i}$ に対して

$$\exp(\lambda x) = \exp\left(\mathrm{Re}(\lambda)x\right) \cdot \{\cos\left(\mathrm{Im}(\lambda)x\right) + \mathrm{i}\sin\left(\mathrm{Im}(\lambda)x\right)\} \tag{14.3}$$

とする。従って，複素数固有値の場合は，実部 $\mathrm{Re}(\lambda)$ の正負に依存して安定性が決まることが分かる。

以下，Smale[8] の分類に従って，2 次元線型常微分方程式の安定性を，固有値（の実部）の正負によって 4 つに分けて考える。

■(I) $\lambda_1\lambda_2 < 0$ の場合　A が実数行列である限り，固有値の実部の符号が逆になるのは共に実数である場合に限られる。その時は，正の固有値に対応する解の要素は発散し，負の固有値に対応する要素は漸近安定となる。例えば $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$ の時は，前者が発散，後者が漸近安定となるので，図 14.2 の左図のように，同じ初期値から出発しても泣き別れなる。

解の安定性を見るためには，横軸に $y_1(x)$, 縦軸に $y_2(x)$ をとった相空間 (phase space) を描画したグラフ (図 14.2 の右図) が使用される。この場合，左上の $[y_1(0)\ y_2(0)]^T = [1\ 1]^T$ から出発し右下へ落ちていく。

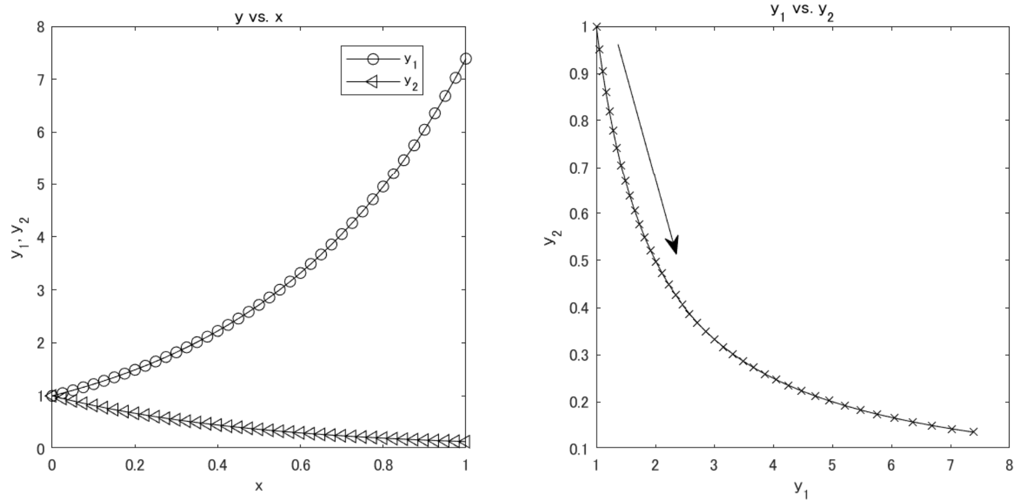

図 14.2　(I) $\lambda_1\lambda_2 < 0$: 解析解 (左) と相空間 (右)

問題 14.1

「A が実数行列である限り，固有値の実部の符号が逆になるのは共に実数である場合に限られる」のは何故か？ A の固有方程式

$$|A - \lambda I_2| = 0$$

を記述し，解となる固有値の場合分けを考えて答えよ。

■(II) $\mathrm{Re}(\lambda_1), \mathrm{Re}(\lambda_2) < 0$ の場合 複素数固有値の場合は実部，実数固有値の場合はそのものであるが，これが両方とも負の場合は漸近安定となるので，ある点に収束する。実際，$\lambda_1 = -3, \lambda_2 = -2$ の時の解析解（左図）と相空間 (右図) を図 14.3 に示す。初期値 $[y_1(0)\ y_2(0)]^T = [1\ 1]^T$ から左下の原点に収束していくことが分かる。

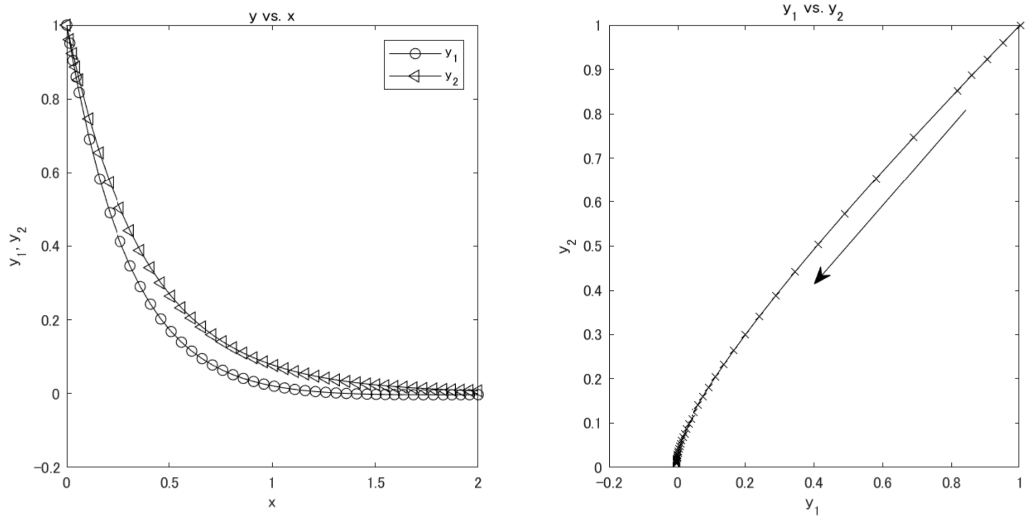

図 14.3 (II) $\mathrm{Re}(\lambda_1), \mathrm{Re}(\lambda_2) < 0$: 解析解 (左) と相空間 (右)

■(III) $\mathrm{Re}(\lambda_1), \mathrm{Re}(\lambda_2) > 0$ の場合 複素数固有値の実部（実数固有値の場合はそのもの）が両方とも正の場合は，(II) のケースとは逆に，解の要素はどちらも発散する。実際，$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2$ の時の解析解（左図）と相空間 (右図) を図 14.3 に示す。初期値 $[y_1(0)\ y_2(0)]^T = [1\ 1]^T$ から右上に向かって発散していくことが分かる。

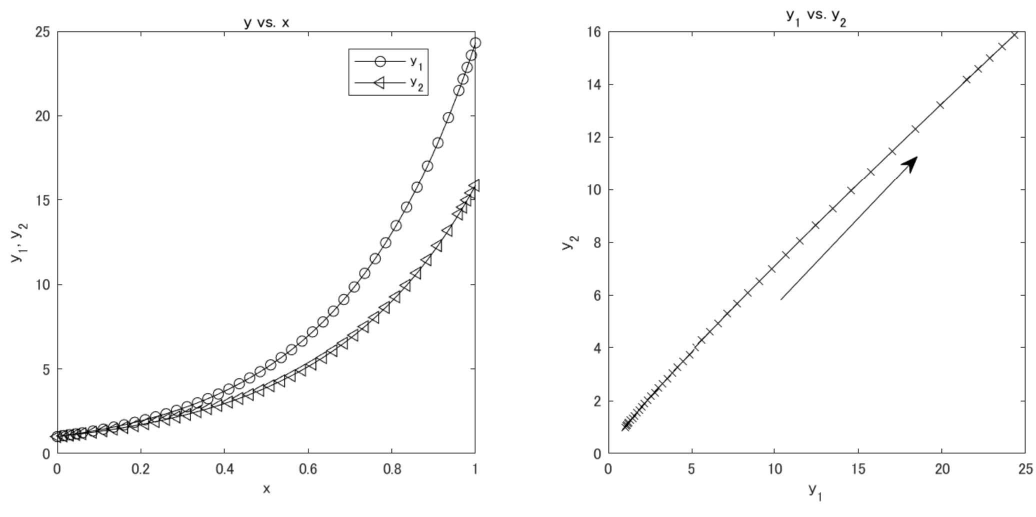

図 14.4 (III) $\mathrm{Re}(\lambda_1), \mathrm{Re}(\lambda_2) > 0$: 解析解 (左) と相空間 (右)

■(IV) λ_1, λ_2 が純虚数の場合 複素固有値の場合，実部がゼロとなる純虚数となることもあるが，この場合は (14.3) 式の三角関数部分しか残らないので，定常状態のままとなるか，ある点を中心に振動する（相空間では回転する）ことに

なる。$\lambda_1 = \mathrm{i}, \lambda_2 = -\mathrm{i}$ の場合は，図 14.3 のように振動（回転）していることが分かる。

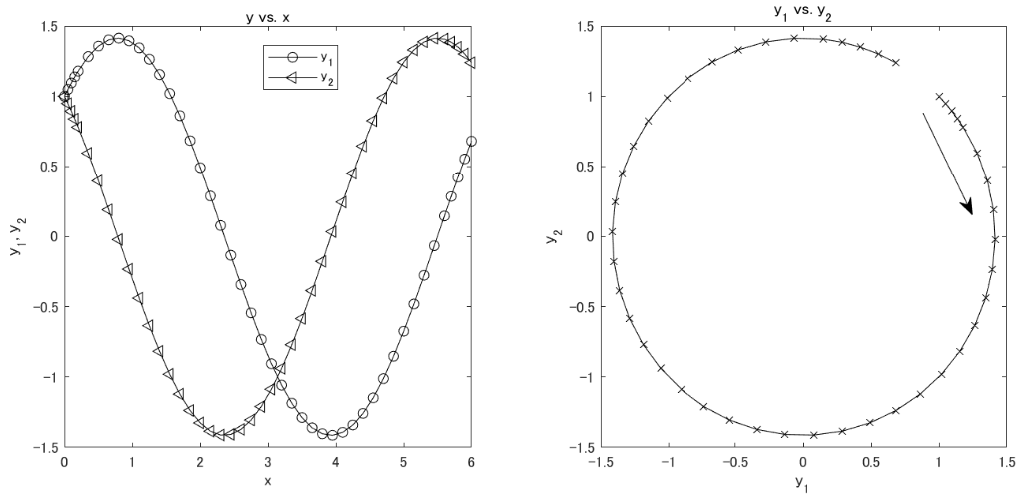

図 14.5　(IV) λ_1, λ_2: 解析解 (左) と相空間 (右)

■まとめ　以上，2 次元線型常微分方程式の安定性を (I)〜(II) のケースに分類してみた。更に全体的にどうなっているのか，特に初期値を動かした時の解の振る舞いを調べるため，$\mathbf{y}_0$ の各要素を $[-5, 5]$((IV) のみ $[0, 5]$) の中で動かして相空間のグラフを描いてみたのが図 14.6 である。グラフの中の赤い点線は図 14.2〜14.5 で描画した解析解である。

常微分方程式を用いて未来予測を行う際には，解の安定性の議論が欠かせない。つまり，常微分方程式の形式が決まれば，解の長期的な振る舞いが確定されるからである。

問題 14.2

次の 4 つの線型常微分方程式は (I)〜(IV) のどれになるかを答え，相空間グラフを描いて安定性の分類の正しさを確認せよ。初期値は $\mathbf{y}_0 = [1\ 1]^T$ とせよ。

$$(1)\ \frac{d\mathbf{y}}{dx} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\mathbf{y},\quad (2)\ \frac{d\mathbf{y}}{dx} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{y},\quad (3)\ \frac{d\mathbf{y}}{dx} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\mathbf{y}$$

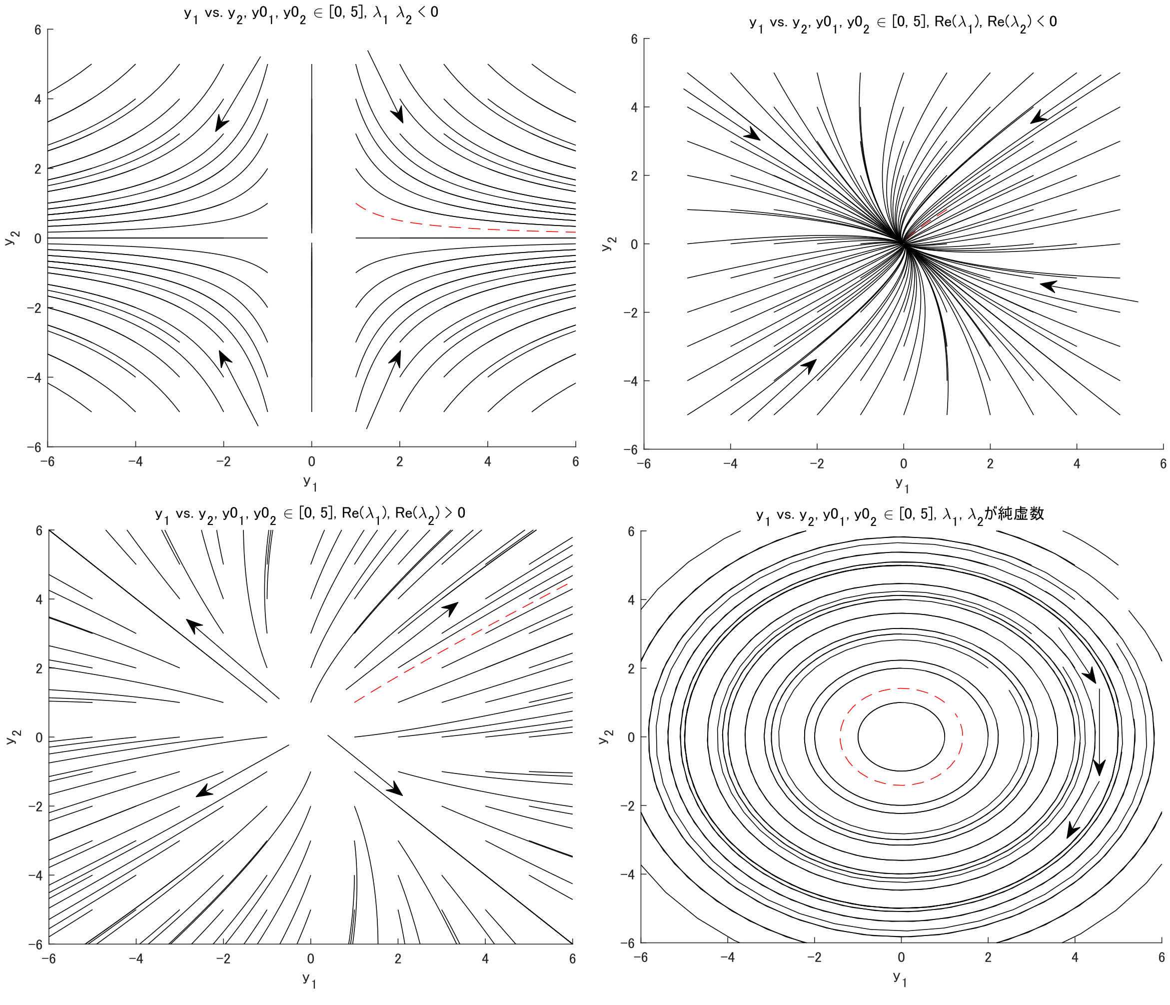

図 14.6　2 次元線型常微分方程式の解の安定性: 左上 (I)，右上 (II)，左下 (III)，右下 (IV)