第 15 章

まとめの問題

ここでは今まで学んできたことを総復習するための演習問題を提示する。下記の条件で解答を行うこと。

- **MATLAB** のみを使用し，**60** 分で解答すること。
- **MATLAB** で計算した場合，数値は有効数字５ケタ **(**６桁目を四捨五入**)** で記入すること。

1. 次の計算を行え。

（a）

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

（b）

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

（c）

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 10 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -10 \\ -9 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{10}$$

であるとき，

$$(3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}, \mathbf{a})$$

2. ベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ が次のように与えられている時，以下の問いに答えよ。

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

（a）$\|\mathbf{x}\|_2, \|\mathbf{y}\|_2, (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ をそれぞれ答えよ。

（b）上記の結果を用いて $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ がなす角を求め，度 (ラジアンに非ず）で答えよ。

（c）$\mathbf{z} = [1 \ z_2 \ z_3]^T$ は $\mathbf{x}$ とも $\mathbf{y}$ とも直交する。z_2, z_3 の値をそれぞれ求めよ。

3. 次の 2 次正方行列 A, B は，片方が対角化可能，もう片方は対角化不可能である。以下の問いに答えよ。

$$A = \begin{bmatrix} 34 & 1 \\ -4 & 30 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 10 & -3 \\ -4 & 14 \end{bmatrix}$$

（a）対角化可能な行列はどれか？ その際，対角化した行列 $\Lambda = X^{-1}\boxed{}X$ を求めよ。

（b）対角化不可能な行列はどれか？　その際，ジョルダン標準形 $J = Y^{-1}\boxed{}Y$ を求めよ。

4. 数列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ が漸化式

$$x_{n+2} = -x_{n+1} - 2x_n$$

で生成されるとき，$x_7 = 16, x_{10} = 80$ となった。この時，初期値 x_0, x_1 を求めたい。次の問いに答えよ。

（a）一般項 x_n をコンパニオン行列 C

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

の固有値 λ_1, λ_2, それぞれの固有値に対応する固有ベクトル $\mathbf{v}_1 = [v_1^{(1)}\ v_2^{(1)}]^T, \mathbf{v}_2 = [v_1^{(2)}\ v_2^{(2)}]^T$ を用いて表現すると，$x_n = \alpha_1\lambda_1^n v_1^{(1)} + \alpha_2\lambda_2^n v_1^{(2)}$ となる。ここで α_1, α_2 は，連立一次方程式

$$[\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2]\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

の解である。$\lambda_1, \lambda_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ を求め，一般項 x_n を α_1, α_2 を用いて表わせ。

（b）一般項 x_n の式と，問題の条件から，α_1, α_2 が満足する連立一次方程式を立て，x_0, x_1 をそれぞれ求めよ。