中間レポート 2: 一般の斉次線型漸化式の一般解

X_m の場合

以上見てきたように，線型漸化式 (8.3) の一般項 x_n は，写像 T と $\varphi : X_m \to \mathbb{R}^m$,

$$\varphi(x) = \varphi(\{x_0, x_1, ..., x_{m-1}, ...\}) = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{m-1} \end{bmatrix}$$

そしてコンパニオン行列 C_m

$$C_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -c_1 & -c_2 & \cdots & \cdots & -c_{m-1} & -c_m \end{bmatrix}$$

が対角化可能である場合，(11.5) 同様，次のような写像の構造ができる。

$$\begin{array}{ccc} x = \{x_0, x_1, ..., x_n, ...\} & \longrightarrow T \longrightarrow & T(x) = \{x_1, x_2, ..., x_{n+1}, ...\} \\ \downarrow & & \uparrow \\ \varphi & & \varphi^{-1} \\ \downarrow & & \uparrow \\ \varphi(x) = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{m-1} \end{bmatrix} & \longrightarrow C_m \longrightarrow & C_m\varphi(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \end{array} \tag{11.9}$$

従って，次のようにして一般項 x_n を求めることができる。

1. 初期値 $\mathbf{x}_0 = [x_0\ x_1\ ...\ x_{m-1}]^T$ を定める。
2. C_m の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ と対応する固有ベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_m$ を求め，$v_1 = \varphi(\mathbf{v}_1) = \{v_0^{(1)}, ...\}$, $v_2 = \varphi(\mathbf{v}_2) = \{v_0^{(2)}, ...\}$, ..., $v_m = \varphi(\mathbf{v}_m) = \{v_0^{(m)}, ...\}$ を得る。
3. $P = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ ...\mathbf{v}_m]$ を作り，連立一次方程式 $P\alpha = \mathbf{x}_0$ を解いて $\alpha = [\alpha_1\ \alpha_2\ ...\ \alpha_m]^T$ を求める。
4. $x_n = \lambda_1^n \alpha_1 v_0^{(1)} + \lambda_2^n \alpha_2 v_0^{(2)} + \cdots + \lambda_m^n \alpha_m v_0^{(m)}$ を得る。

問題 11.4

1. $T(x)$ が線型変換，即ち，任意の定数 α, β および $x, y \in X_m$ に対して，

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

であることを示せ。

2. 次の線型漸化式に対して初期値 $x_0, x_1, \ldots$ を与えた時に一般項を求める MATLAB プログラムを作れ。
   （a）$x_{n+3} = -6x_{n+2} + 11x_{n+1} - 6x_n$
   （b）$x_{n+4} = -5x_{n+3} - 7x_{n+2} - 9x_{n+1} + x_n$
   （c）$x_{n+5} = 4x_{n+4} + 2x_{n+3} - 5x_{n+2} + x_{n+1} + 3x_n$

参照用として，m 次線形漸化式の一般項表現を求め，検算を行う MATLAB スクリプトを以下に示す。

```
% m 次線形漸化式の一般項表現の導出
clear;

% （a）x_{n+3} := 6x_{n+2} + 11x_{n+1} ? 6x_n
m = 3; c = [-6, 11, -6]; x_init = [1; 1; 1];

% コンパニオン行列生成
C = zeros(m);
for i = 1:m
    C(m, i) = c(i);
end;
for i =1:m-1
    C(i, i + 1) = 1; % 対角成分の上を 1 に
end;

disp("C = "); disp(C);

% 固有値と固有ベクトル
[P, Lambda] = eig(C);
disp("P = "); disp(P);
disp("Lambda = "); disp(Lambda);

% P * alpha = x_init
alpha = inv(P) * x_init;

% 検算 x == x_init?
x = zeros(m,1);
for i = 1:m
    x = x + alpha(i) * P(:, i);
end
disp("x = "); disp(x);
disp("x_init = "); disp(x_init);

% 一般項の表示
fprintf(' 一般項: x_n :=((%15.7e) + (%15.7e) * i)^n * ((%15.7e) + (%15.7e) * i)
```

```
 * ((%15.7e) + (%15.7e) * i) ', real(Lambda(1, 1)), imag(Lambda(1, 1)), real(alpha(1)), imag(alpha(1)), real(P(1, 1)), imag(P(1, 1)) );
for i = 2:m
    fprintf(' + ((%15.7e) + (%15.7e) * i)^n * ((%15.7e) + (%15.7e) * i) * ((%15.7e) + (%15.7e) * i) ', real(Lambda(i, i)), imag(Lambda(i, i)), real(alpha(i)), imag(alpha(i)), real(P(1, i)), imag(P(1, i)) );
end
fprintf("\n");

% 検算
for i = 1:50
    xn_true = seq_n(i, c, x, m); % 漸化式で計算
    xn_appr = general_n(i, alpha, Lambda, P, m); % 一般項の式で計算
    fprintf("%3d: %15.7e, %15.7e, %5.1e\n", i, xn_true, xn_appr, relerr(xn_appr, xn_true));
end

% 相対誤差
function ret = relerr(approx, true_val)
    ret = abs(approx - true_val);
    if(abs(true_val) >= 1.0e-308)
        ret = ret / abs(true_val);
    end
end

%  一般項表現に基づく数列の第 n 項計算
%  x_n := \sum^{m}_{k = 1} \lambda_k^n * alpha(k) * v^(k)_0
function xn = general_n(n, alpha, Lambda, P, m)
    xn = 0;
    for i = 1:m
        xn = xn + Lambda(i, i)^n * alpha(i) * P(1, i);
    end
end

%  漸化式に基づく数列の第 n 項計算
function xn = seq_n(n, c, x, m)
    temp = [];
    for i = 1:m
        temp(i) = x(i);
    end

    if n < m
```

```
        xn = temp(n);
    else
        for i = m:n
            xn = 0;
            for i = 1:m
                xn = xn + c(i) * temp(i);
            end
            for i = 1:m - 1
                temp(i) = temp(i + 1);
            end
            temp(m) = xn;
        end
    end
end
```