第18章　常微分方程式の境界値問題

18.1　2階線型常微分方程式の境界値問題

一般に，常微分方程式の境界値問題は

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{y}}{dx} &= \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \\ r(\mathbf{y}(a), \mathbf{y}(b)) &= 0 \end{cases} \tag{18.1}$$

という形で与えられる。閉区間 $[a, b]$ の端点における条件に基づいて解が確定するので，境界値問題 (Boundary Value Problem, BVP) と呼ばれる。

ここでは 1 次元の 2 階線型常微分方程式における境界値問題

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} &= p(x)y + q(x) \\ y(a) = \alpha &, \quad y(b) = \beta \end{cases} \tag{18.2}$$

について考えることにする。

問題 18.1.1
1 次元 2 階線型常微分方程式の一般形は

$$\frac{d^2y}{dx^2} = R(x)\frac{dy}{dx} + P(x)y + Q(x)$$

であるが，(18.2) 式のように変形が可能である。これを示せ。[Hint: $y(x) = u(x)v(x)$ と置き，$u(x)$ についての常微分方程式として考えればよい。]

18.2　差分法

閉区間 $[a, b]$ を n 等分割し，その一区間幅を $h = (b - a)/n$，各分点を $x_i = a + ih$ $(i = 0, 1, ..., n)$ とおく。この時，x_i における y の 2 階導関数を (15.3) に基づき

$$\frac{d^2y}{dx^2}(x_i) \approx \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} \tag{18.3}$$

と置き直す。以下，$y(x_i)$ の近似値を y_i と書くことにする。

さすれば，端点を除いた各分点 $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ において

$$\begin{aligned}
\frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} &= p(x_1)y_1 + q(x_1) \\
\frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{h^2} &= p(x_2)y_2 + q(x_2) \\
&\vdots \\
\frac{y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}}{h^2} &= p(x_{n-1})y_{n-1} + q(x_{n-1})
\end{aligned}$$

となる。$y_0 = \alpha, y_n = \beta$ であるから，これを置き直し，更に行列とベクトルの積の形で書き直すと

$$\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} -2 - p(x_1)h^2 & 1 & & & \\ 1 & -2 - p(x_2)h^2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 - p(x_{n-2})h^2 & 1 \\ & & & 1 & -2 - p(x_{n-1})h^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha + q(x_1) \\ q(x_2) \\ \vdots \\ q(x_{n-2}) \\ -\beta + q(x_{n-1}) \end{bmatrix} \tag{18.4}$$

となる。この連立一次方程式を解くことで，端点を除いた各分点における近似値 $y_1, y_2, ..., y_{n-1}$ を得ることが出来る。このように，導関数を差分商で近似して離散解法に置きなおす方法を差分法と呼ぶ。

例題 18.2.1

Bulirsch & Stoer の例題 (p.550)

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} = 400y + 400\cos^2 \pi x + 2\pi^2 \cos 2\pi x \\ y(0) = 0 \quad , \quad y(1) = 0 \end{cases} \tag{18.5}$$

に差分法を適用してみる。解析解は

$$y(x) = \frac{\exp(-20)}{1 + \exp(-20)} \exp(20x) + \frac{1}{1 + \exp(-20)} \exp(-20x) - \cos^2 \pi x \tag{18.6}$$

である。分割数 n を $n = 11, 51, 101, 501$ とした時の各近似値の相対誤差を図 18.1 に示す。

問題 18.2.1

1. 2 階導関数が式 (18.3) で近似出来ることを示せ。
2. 分割幅 $h = (b - a)/n$ を小さくしていくと，連立一次方程式 (18.4) の係数行列の条件数はどのように変化していくか？
3. 図 18.1 ではちょうど $x = 1/2$ 近辺で相対誤差が極端に悪化している。その原因を調べよ。

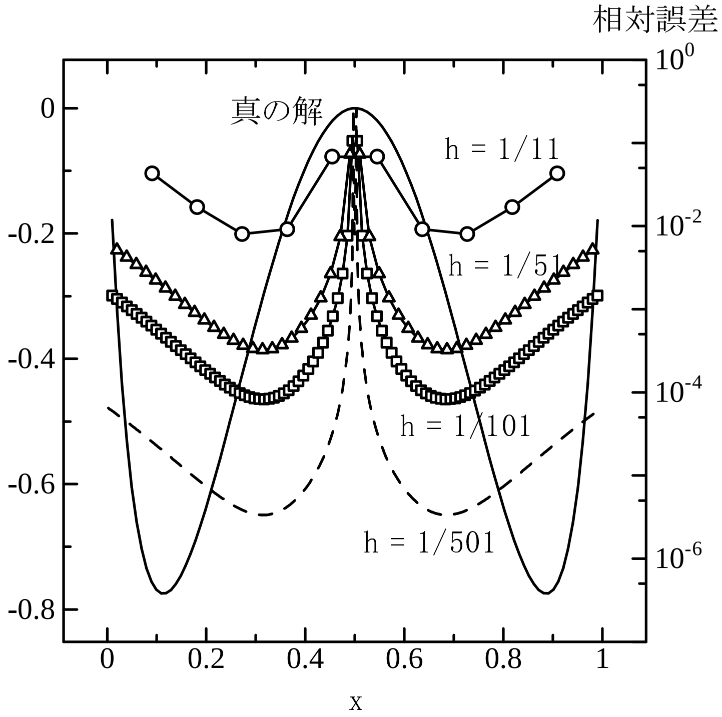

図 18.1: 差分法による数値解の相対誤差