

方程式を解いてみよう

静岡理工科大学

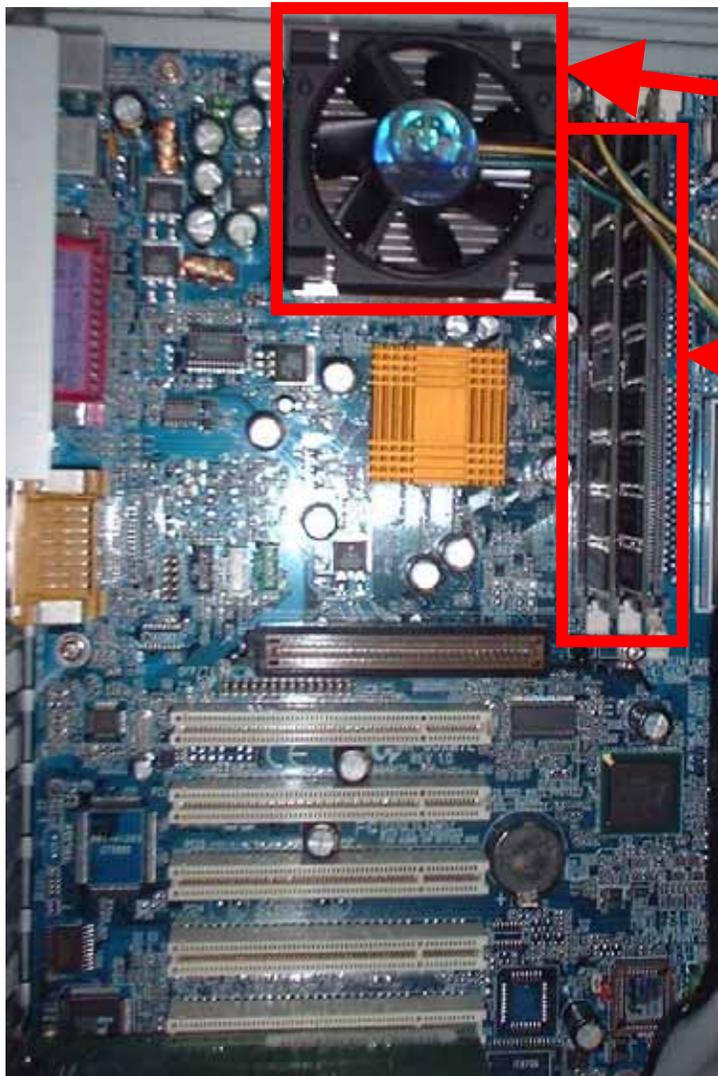
理工学部 情報システム学科

幸谷智紀(こうや とものり)

概要

- コンピュータのしくみ
- 表計算ソフトとは？
- 方程式はなぜ必要か？
- 方程式を解く方法
- グラフを使う方法
- 中点法
- レギュラ・ファルシ法
- 課題

コンピュータのしくみ(1/2)



多くの処理(計算)はここで行われる

CPU

データを蓄える場所

メインメモリ
RAM

外部記憶

2進数
(bit列)

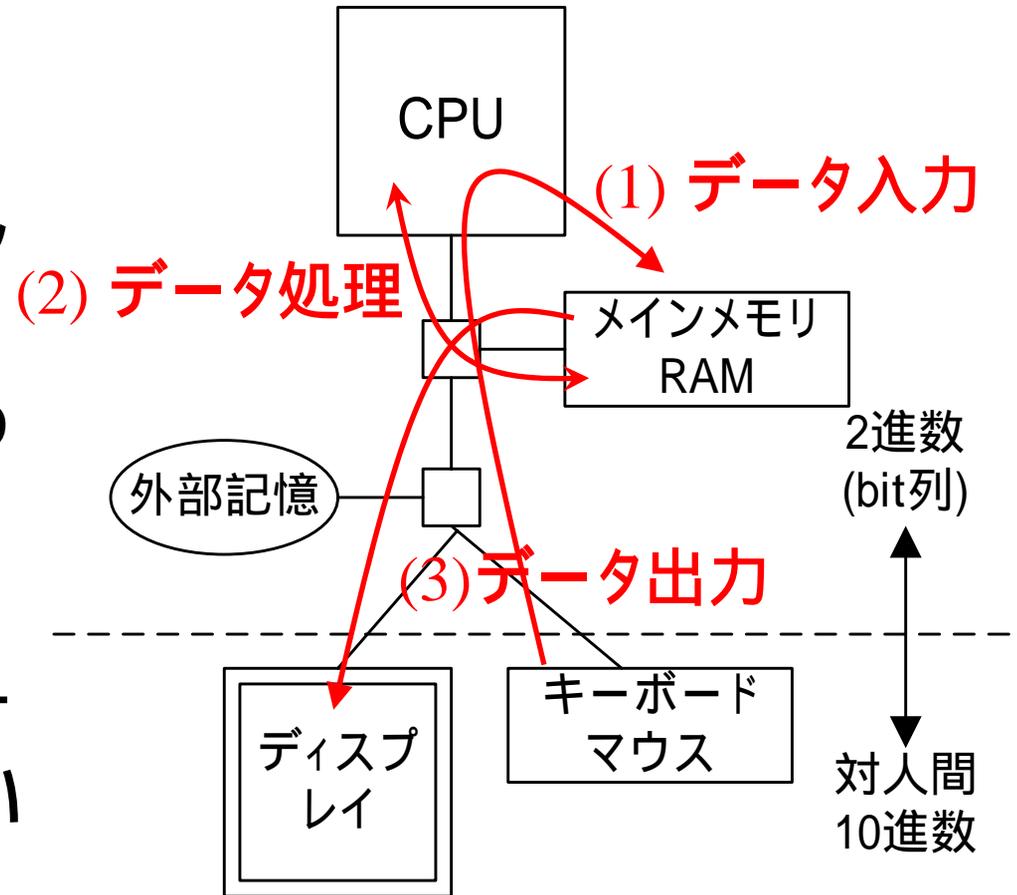
ディスプレイ

キーボード
マウス

対人間
10進数

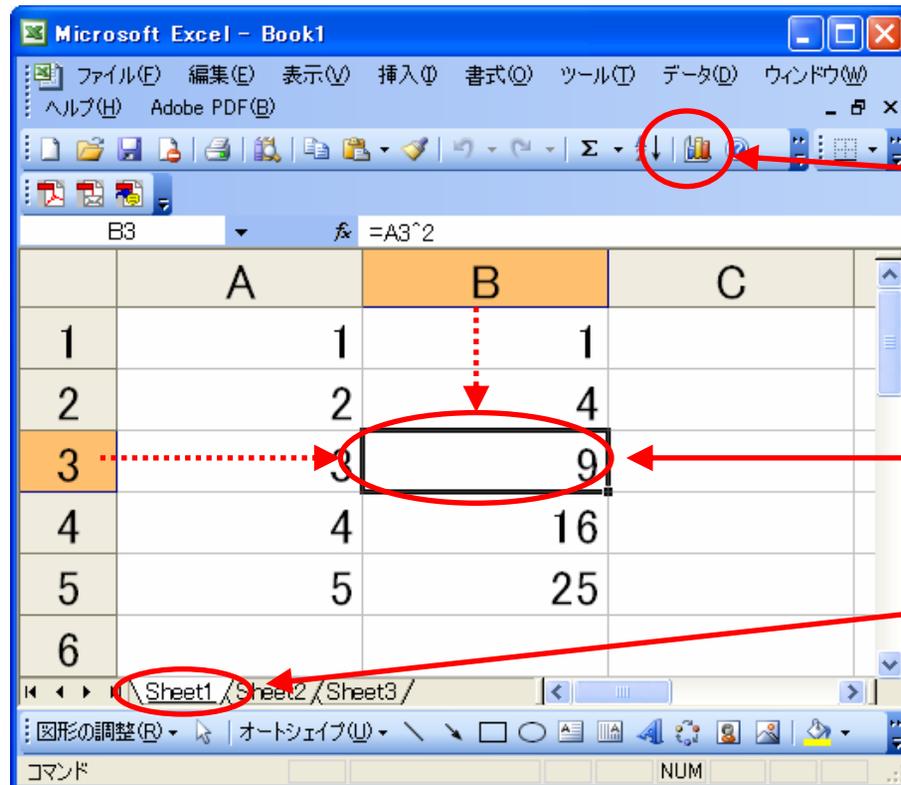
コンピュータのしくみ(2/2)

- 2進回路の組み合わせ
せ 単純な計算し
か出来ない
- 四則演算の組み合わ
せで全てを表現する
- 但し、沢山繰り返して
も良い(一回辺りの計
算時間はとても小さい
から)



表計算ソフトとは？ (1/3)

- 例えばExcel(エクセル)が有名。
- セル(cell)にデータを入力し, 計算したりグラフを描いたりできる。
- 一つのファイルに複数のシート(表)を作ることができる。



グラフウィザード

B3セル

シート名

表計算ソフトとは？(2/3)

計算は、半角の「=」に続いて計算式を入力。

計算式・・・セルの指定と加減乗除(+, -, *, /),
累乗(^)・・・等の組み合わせで表現する。

[肩慣らし] A列: 1 ~ 5
まで入力 B列: A列の値
の2乗を自動
計算 C列: A列と
B列の相加
平均を自動
計算

	A	B	C
1	1	1	1
2	2	4	3
3	3	9	6
4	4	16	10
5	5	25	15

表計算ソフトとは？ (3/3)

[計算方法]

- A列に1から5までの自然数を入力。
- B1にA1の2乗を計算 「=A1^2」
- C1にA1とB1の値の相加平均を計算
「=(A1 + B1) / 2」。
- B1, C1を選択し, 右下の黒ポッチをドラッグして5行分コピーする。

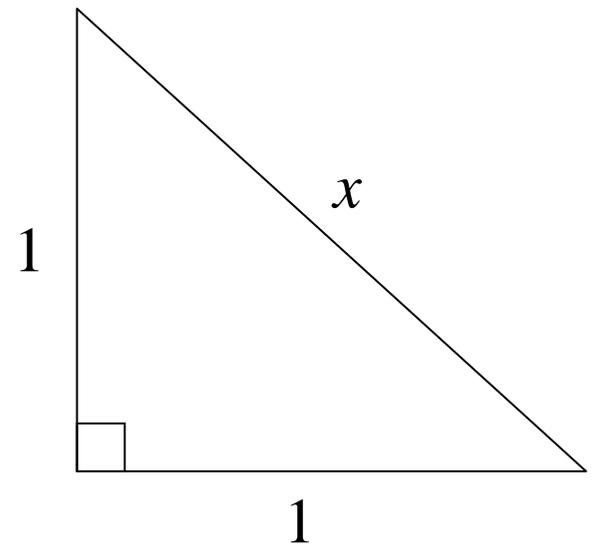
方程式はなぜ必要か？(1/2)

問題「直角をなす一辺の長さが1メートルの、直角二等辺三角形の斜辺の長さは何メートルか？」

$\sqrt{2}$ メートル, では実用上困る。
小数で表現すると？
(電卓を使うとよい)

$$\sqrt{2} = \underline{\hspace{2cm}}$$

何故分かるか？



方程式はなぜ必要か？ (2/2)

ピタゴラスの定理と方程式

斜辺の長さ x メートルとすれば

$$x^2 = 1^2 + 1^2$$

より

$$x^2 = 2$$

この方程式を x について解き, その正の解を求めればよい。

以下では, 全ての方程式を $f(x) = 0$ と表現する。

上記の方程式も

$$x^2 - 2 = 0$$

と変形して扱う。

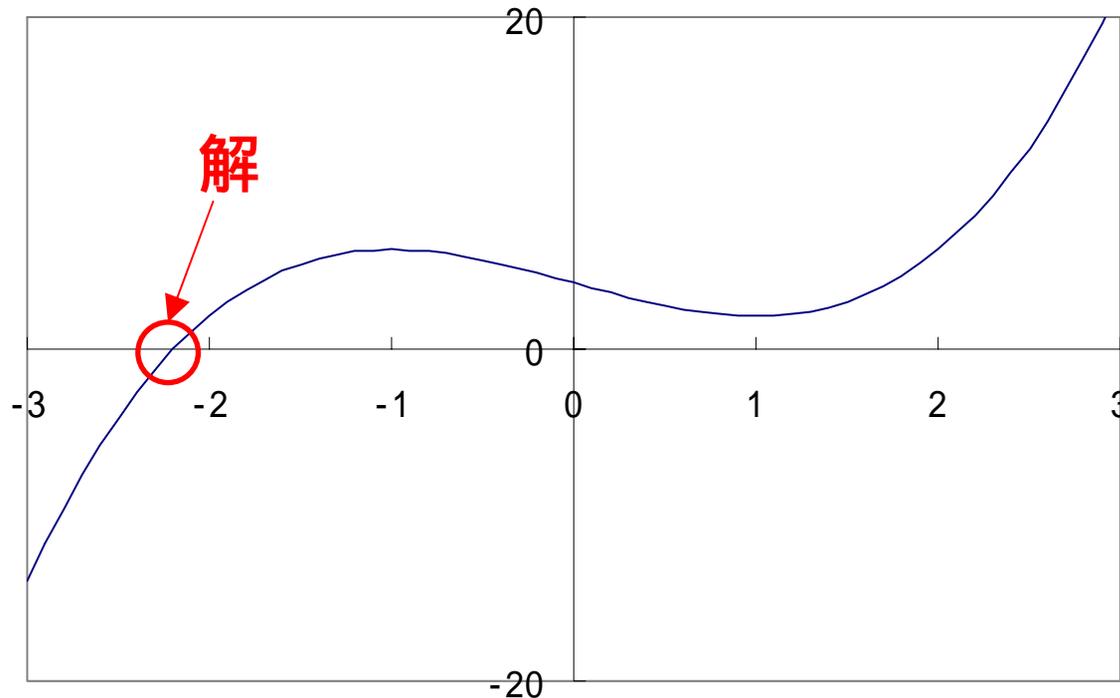
方程式を解く方法

- グラフを使う方法
- 中点法
- レギュラ・ファルシ法
- (ニュートン法)

グラフを使う方法(1/3)

- 方程式の解 x は $f(x) = 0$ となる

$y = f(x)$ のグラフを書いて, x 軸との交点の x 座標を求めればよい。



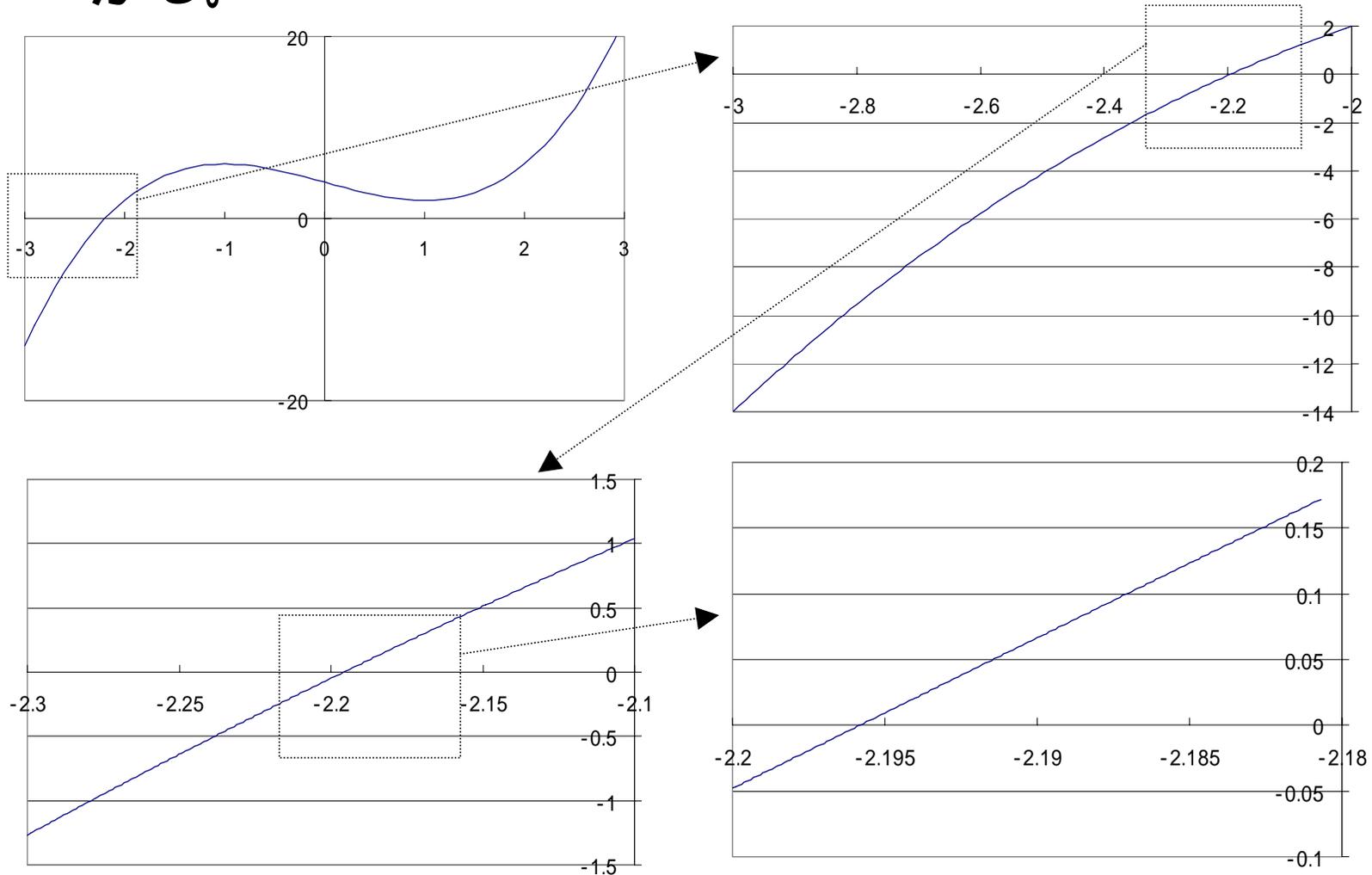
グラフを使う方法(2/3)

[長所] グラフが簡単に描ければ、どの辺に解があるかを予め知ることが出来る。

- Excelのグラフ機能を活用する。
- 手順：
 1. A列に x の値を一定刻みで並べる
 2. B列に $f(x)$ の値を自動的に計算させて並べる
 3. 計算したA, B列のセルを選択し、グラフウィザードを起動してグラフを描く。

グラフを使う方法(3/3)

- [短所] **正確な**交点の位置を求めるのは手間がかかる。



練習 1

- $y = x^2 - 2$ のグラフを描き, 方程式 $x^2 - 2 = 0$ の解がどの辺りにあるかを確認せよ。但し, 全ての解がどの辺にあるのか分かる範囲に設定すること。
 1. x の範囲が -10 から 10 まで, 刻み幅 1
 2. -5 から 5 まで, 刻み幅 0.5
 3. -2 から 2 まで, 刻み幅 0.1
 4. 1 から 2 まで, 刻み幅 0.05

グラフの描き方(1/2)

1. 最初の x の値を代入し, y の値を自動計算させる。

	A	B	
1	x	y	
2	-10	=A2^2-2	

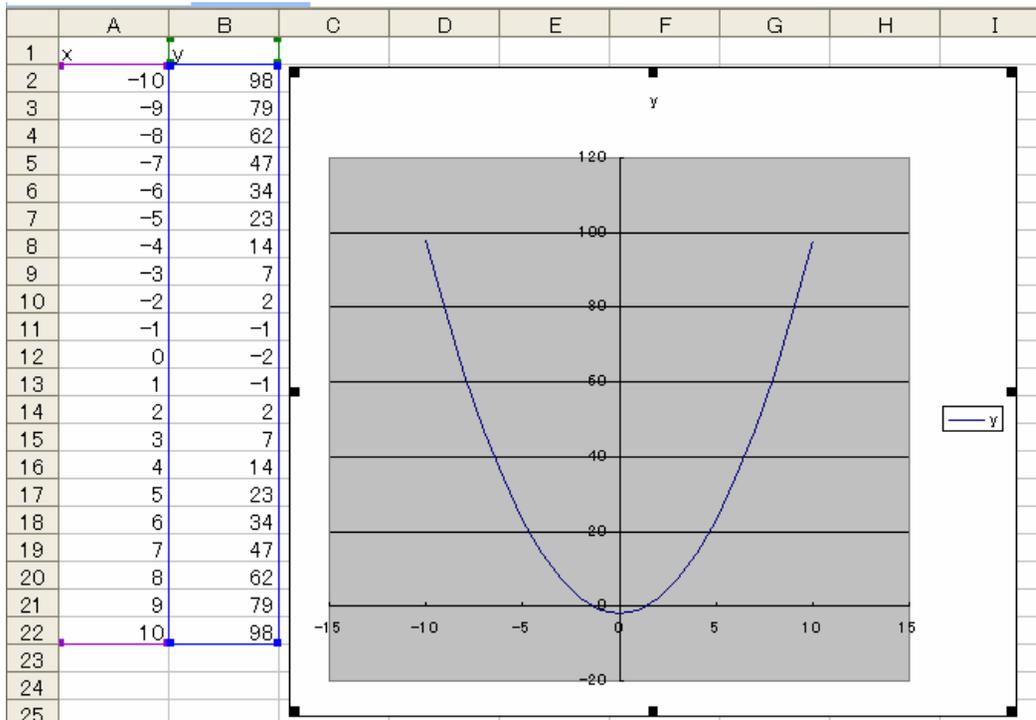
2. 次の x の値を, 刻み幅を加えて自動計算させ, y の値は上の計算式をコピーしてこれも自動計算させる。

	A	B	
1	x	y	
2	-10		98
3	=A2+1		79

3. 最後の x の値になるまでA, B列のセルを下にコピーし続ける。

グラフの描き方(2/2)

4. 計算が完了したら, 計算したセルを全て選択し, グラフウィザードを起動して「散布図」を選ぶ。
5. グラフを描く。



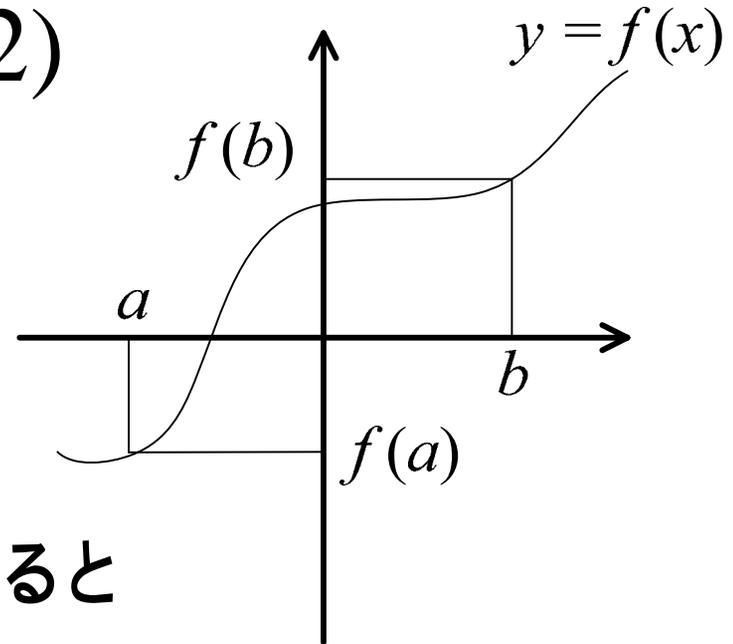
中点法(1/2)

1. 方程式の解 x が一つだけ含まれる区間 $[a, b]$ を決める。
2. $c = (a + b) / 2$ として区間の中点を設定し, $[a, c]$ (左側), $[c, b]$ (右側) どちらかの, 解が含まれている区間を見つける。
3. 解が含まれている区間を新たに $[a, b]$ とする。
4. 1 ~ 3 の手続きを続ける。

中点法(2/2)

[原理] 解が一つだけ区間 $[a, b]$
に含まれている

$$f(a)f(b) < 0$$



区間の中点を $c = (a + b) / 2$ とすると

(1) $[a, c]$ に解が含まれている $f(a)f(c) < 0$

(2) $[c, b]$ に解が含まれている $f(c)f(b) < 0$

のどちらかになる。よって

(1)の場合は, $b := c$, a はそのまま

(2)の場合は, $a := c$, b はそのまま

としてこの手続きを繰り返す。

ExcelのIF関数

=IF(
条件式,
条件式が満たされている時の値(式),
条件式が満たされていない時の値(式)
)

例

次の a の値・・・ $=\text{IF}(\underline{f(a) * f(c) < 0}, a, c)$

次の b の値・・・ $=\text{IF}(\underline{f(c) * f(b) < 0}, b, c)$

練習 2

- 練習1の結果を使って, a, b を設定し, 中点法を用いて方程式 $x^2 - 2 = 0$ の正の解を見つけよう。

Excelで中点法を実行する(1/3)

1. 方程式と見出しを記入し, 最初の a , b の値をセルに記入する。
2. c , $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ の値を自動計算させる。

	A	B	C	D	E	F
1	$x^2-2=0$					
2						
3	a	b	c	f(a)	f(b)	f(c)
4	0	10	$=(A4+B4)/2$		98	23

Excelで中点法を実行する(2/3)

3. (1)の判定をするための数式を記入する。

VARP =IF(D4*F4<0,A4,C4)

	A	B	C	D	E	F
1	$x^2-2=0$					
2						
3	a	b	c	f(a)	f(b)	f(c)
4	0	10	5	-2	98	23
5	=IF(D4*F4<0,A4,C4)		2.5	-2	23	4.25

4. (2)の判定をするための数式を記入する。

	b	c	f(
)	10	5	
)	=IF(E4*F4<0,B4,C4)		

5. c から $f(c)$ までは上の式をそのままコピーする。

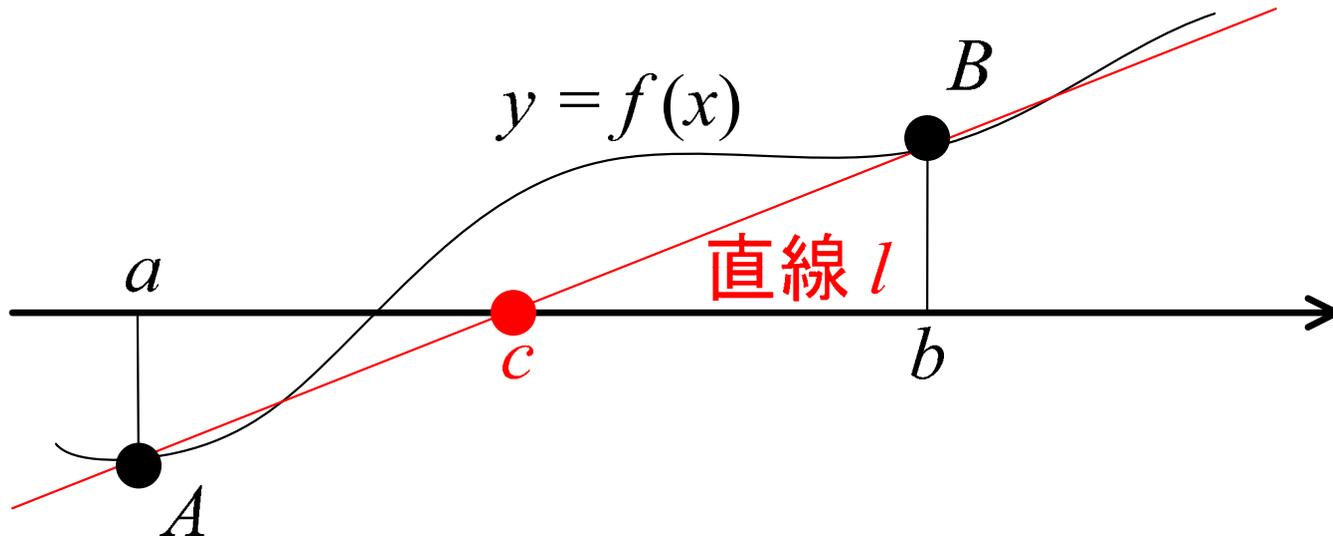
a	b	c	f(a)	f(b)	f(c)
0	10	5	-2	98	23
0	5	2.5	-2	23	4.25

Excelで中点法を実行する(3/3)

6. a, b, c の値が同じになるまで全ての列を下にコピーし続ける。

	A	B	C	D	E	F
1	$x^2-2=0$					
2						
3	a	b	c	f(a)	f(b)	f(c)
4	0	10	5	-2	98	23
5	0	5	2.5	-2	23	4.25
6	0	2.5	1.25	-2	4.25	-0.4375
7	1.25	2.5	1.875	-0.4375	4.25	1.515625
8	1.25	1.875	1.5625	-0.4375	1.515625	0.4414063
9	1.25	1.5625	1.40625	-0.4375	0.4414063	-0.022461
10	1.40625	1.5625	1.484375	-0.022461	0.4414063	0.2033691
11	1.40625	1.484375	1.4453125	-0.022461	0.2033691	0.0889282
12	1.40625	1.4453125	1.4257813	-0.022461	0.0889282	0.0328522
13	1.40625	1.4257813	1.4160156	-0.022461	0.0328522	0.0051003
14	1.40625	1.4160156	1.4111328	-0.022461	0.0051003	-0.008704
15	1.4111328	1.4160156	1.4135742	-0.008704	0.0051003	-0.001808
16	1.4135742	1.4160156	1.4147949	-0.001808	0.0051003	0.0016447
17	1.4135742	1.4147949	1.4141846	-0.001808	0.0016447	-8.2E-05
18	1.4141846	1.4147949	1.4144897	-8.2E-05	0.0016447	0.0007812
19	1.4141846	1.4144897	1.4143372	-8.2E-05	0.0007812	0.0003496
20	1.4141846	1.4143372	1.4142609	-8.2E-05	0.0003496	0.0001338
21	1.4141846	1.4142609	1.4142227	-8.2E-05	0.0001338	2.589E-05
22	1.4141846	1.4142227	1.4142036	-8.2E-05	2.589E-05	-2.81E-05

レギュラ・ファルシ法(1/2)



1. 解に近い2点 $A: (a, f(a))$, $B: (b, f(b))$ を決める。
2. A, B を通過する直線 l を求める。
3. l と x 軸との交点 $C: (c, 0)$ を求める。
4. 新 $A :=$ 旧 B ($a := b$), 新 $B := C$ ($b := c$) とする。
5. 1 ~ 4の手続きを繰り返す。

レギュラ・ファルシ法(2/2)

直線 l は

$$y - f(b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - b)$$

より

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x + \frac{f(a)b - f(b)a}{b - a}$$

となるので, x 軸との交点は $y = 0$ より

$$c = \frac{f(b)a - f(a)b}{f(b) - f(a)}$$

となる。この c は b より解に近いと考えられるから,

$$a := b, b := c$$

として, 同じ手続きを続ける。

練習3

- 練習1の結果を使って a, b を設定し, レギュラ・ファルシ法を用いて方程式 $x^2 - 2 = 0$ の正の解を見つけてみよ。

Excelでレギュラ・ファルシ法を実行する(1/2)

1. 方程式, 見出し, 最初の a , b の値を代入し, $f(a)$, $f(b)$ の値を自動計算させる。

	A	B	C	D	E
1	$x^2-2=0$				
2					
3	a	b	f(a)	f(b)	c
4	0	10	-2	98	

2. c の値を自動計算させる。

c
$= (D4 * A4 - C4 * B4) / (D4 - C4)$

3. 次の a の値を上の上の b に, 次の b の値を上の上の c に設定する。

3	a	b
4	0	10
5	=B4	0.2

b	f(a)	f(b)	c
10	-2	98	0.2
=E4	98	-1.96	0.3921569

Excelでレギュラ・ファルシ法を実行する(2/2)

4. $f(a), f(b), c$ の計算は上からコピーする。

	A	B	C	D	E
1	$x^2-2=0$				
2					
3	a	b	f(a)	f(b)	c
4	0	10	-2	98	0.2
5	10	0.2	98	-1.96	0.3921569

5. a, b の値が一致するまで, 5行目を下へコピーし続ける。

	A	B	C	D	E
1	$x^2-2=0$				
2					
3	a	b	f(a)	f(b)	c
4	0	10	-2	98	0.2
5	10	0.2	98	-1.96	0.3921569
6	0.2	0.3921569	-1.96	-1.846213	3.5099338
7	0.3921569	3.5099338	-1.846213	10.319635	0.8652912
8	3.5099338	0.8652912	10.319635	-1.251271	1.1512813
9	0.8652912	1.1512813	-1.251271	-0.674551	1.4857852
10	1.1512813	1.4857852	-0.674551	0.2075577	1.4070774
11	1.4857852	1.4070774	0.2075577	-0.020133	1.414037
12	1.4070774	1.414037	-0.020133	-0.000499	1.414214
13	1.414037	1.414214	-0.000499	1.263E-06	1.4142136
14	1.414214	1.4142136	1.263E-06	-7.89E-11	1.4142136
15	1.4142136	1.4142136	-7.89E-11	0	1.4142136

どちらが早く解に近づくか？

- 方程式にもよるが、レギュラ・ファルシ法の方が中点法より若干早く解に近づく。

	A	B	C	D	E	F
1	$x^2-2=0$					
2						
3	a	b	c	f(a)	f(b)	f(c)
4	0	10	5	-2	98	23
5	0	5	2.5	-2	23	4.25
6	0	2.5	1.25	-2	4.25	-0.4375
7	1.25	2.5	1.875	-0.4375	4.25	1.515625
8	1.25	1.875	1.5625	-0.4375	1.515625	0.4414063
9	1.25	1.5625	1.40625	-0.4375	0.4414063	0.022461
10	1					0.2033691
11	1					0.0889282
12	1.40625	1.4403125	1.4207813	-0.022461	0.0889282	0.0328522
13	1.40625	1.4257813	1.4160156	-0.022461	0.0328522	0.0051003
14	1.40625	1.4160156	1.4111328	-0.022461	0.0051003	-0.008704
15	1.4111328	1.4160156	1.4135742	-0.008704	0.0051003	-0.001808
16	1.4135742	1.4160156	1.4147949	-0.001808	0.0051003	0.0016447
17	1.4135742	1.4147949	1.4141846	-0.001808	0.0016447	-8.2E-05
18	1.4141846	1.4147949	1.4144897	-8.2E-05	0.0016447	0.0007812
19	1.4141846	1.4144897	1.4143372	-8.2E-05	0.0007812	0.0003496
20	1.4141846	1.4143372	1.4142609	-8.2E-05	0.0003496	0.0001338
21	1.4141846	1.4142609	1.4142227	-8.2E-05	0.0001338	2.589E-05
22	1.4141846	1.4142227	1.4142036	-8.2E-05	2.589E-05	-2.81E-05

中点法・・・28回

	A	B	C	D	E
1	$x^2-2=0$				
2					
3	a	b	f(a)	f(b)	c
4	0	10	-2	98	0.2
5	10	0.2	98	-1.96	0.3921569
6	0.2	0.3921569	-1.96	-1.846213	3.5099338
7					12
8					13
9	0.8652912	1.1512813	-1.251271	-0.674551	1.4857852
10	1.1512813	1.4857852	-0.674551	0.2075577	1.4070774
11	1.4857852	1.4070774	0.2075577	-0.020133	1.414037
12	1.4070774	1.414037	-0.020133	-0.000499	1.414214
13	1.414037	1.414214	-0.000499	1.263E-06	1.4142136
14	1.414214	1.4142136	1.263E-06	-7.89E-11	1.4142136
15	1.4142136	1.4142136	-7.89E-11	0	1.4142136

レギュラ・ファルシ法・・・12回

課題

次の方程式の解の一つを,

(a) グラフを書いて, 解の個数と大体の位置の見当をつける

(b) 中点法で求める

(c) レギュラ・ファルシ法で求める

として求めよ。

[注意] 必ず $f(x) = 0$ の形に移項してから計算すること!

(1) $x^2 = -3x + 10$

(2) $x^3 = 3$

(3) $x^3 = 2$