第 3 章

n 次元線型空間の基底と一次独立性

普段何気なく使っている「座標」というものを，ここでは明確に定義する。我々人間は何かの「物差し」，即ち，基準となる具体的なものがなければ，物を計ることができない。座標とはこの物差しにあたるベクトルの組，即ち「基底」というものが具体的に定められた結果として得られる点の位置，あるいはベクトルのことである。基底と見なせるベクトルの組には「一次（線型）独立」という性質が必要となるが，それ以外の性質は必要としない。それ故に，様々な基底を，その用途に応じて便利なように決定することができる。本章では何気なく使っている普通の意味での「座標」が「標準正規直交基底」によって定義されるものであることを知り，その後，多様な「基底」に触れていくことにする。

3.1 標準正規直交基底と座標

既に前章で n 次元線形空間におけるベクトルの定義 (1.6) を述べた。まず簡単に 3 次元空間で具体的にその意味するところを考えてみる。

$\mathbf{v} \in \mathbb{C}^3$ が

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

と与えられる時，これはそれぞれ x 座標の値が -1,y 座標の値が 2，z 座標の値が -3 であることを意味している。自然に考えれば，これはそれぞれの座標の値が 1 の所を基準とし，その何倍か？という量として決められた値と考えることができる。

ここで，それぞれの座標における 1 の値をベクトルであるとすると，それぞれ $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ と書けば，それを座標で表現すると

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

となる。$\mathbf{v}$ をこの $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ のスカラー倍と和で表現すると

$$\mathbf{v} = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3$$

となることはすぐに分かる。

このように，n 次元線形空間において，n 個の座標基準値 1 に対応する n 個のベクトルの組 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\ ...,\ \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

を標準正規直交基底 (standard orthnormal basis) と呼ぶ。これによって任意の $\mathbf{v} = [v_1\ v_2\ ...\ v_n]^T$ は

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + \cdots + v_n\mathbf{e}_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} v_i\mathbf{e}_i \end{aligned} \tag{3.1}$$

のように，標準正規直交基底 $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ のスカラー倍と和の形で表現できる。

問題 3.1
$\mathbb{C}^4$ における標準正規直交基底 $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_4\}$ を書き出し，これを用いて (3.1) の形で下記のベクトルを表現せよ。

1. $\mathbf{a} = [4\ \ 3\ \ 2\ \ 1]^T$
2. $\mathbf{b} = [\mathrm{i}\ \ 2+3\mathrm{i}\ \ -4\mathrm{i}\ \ -5+6\mathrm{i}]^\mathrm{T}$
3. $\mathbf{c} = [\sqrt{3}\ \ 7\mathrm{i}\ \ -9+3\mathrm{i}\ \ 2]^\mathrm{T}$

3.2　様々な基底と基底の取替

標準正規直交基底 $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ は普通の意味での「座標」を決定するための標準的な「定規」である。では，もっと他のベクトルも定規にできないだろうか？

例えば $\mathbb{R}^2$ において，次のようなベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}^2$ を考えてみよう。

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

このベクトルの組 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ を「基底」と見なし，例えば $\mathbf{c} = [3\ 2]^T \in \mathbb{R}^2$ を

$$\mathbf{c} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2$$

と表現できないだろうか？　そのまま $\mathbf{c}$ の値を当てはめれば，$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ は

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

を満足するように決定出来ればよい。実際，この連立一次方程式を解くと $x_1 = 5/2, x_2 = -1/2$ と一意に決定でき，結果として

$$\mathbf{c} = -\frac{5}{2}\mathbf{a}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{a}_2$$

と表現できる。即ち，先の標準正規直交基底の例同様，基底が $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ であるという前提条件のもとで，$\mathbf{c}$ は，新たな座標 $\mathbf{c}'$ を持ち

$$\mathbf{c}' = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

と表現できることになる。

標準正規直交基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ を用いれば，$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ は

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,\ \mathbf{a}_2 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$$

となる。まとめて行列の形で書くと

$$[\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2] = [\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = I_2 T = T$$

と表現できる。ここでできる $T = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2]$ を，標準正規直交基底から基底 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ への変換行列 (transform matrix) と呼ぶ。

先の $\mathbf{c}$ の基底 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ への変換は，この T を用いて

$$T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

という連立一次方程式を解いて得られたものである。逆に考えると，もし変換行列 $T = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2]$ が正則行列でなければ，変換後の座標 x_1, x_2 は一意には決まらない。このように n 次元線形空間における基底とは，変換行列 T が正則でなければならない。このような n 個のベクトルの組を一次（線型）独立 (linear independant) と呼ぶ。

定義 3.1 (基底と一次独立性)

$\mathbb{C}^n$ における n 個のベクトルの組 $\{\mathbf{a}_i\}_{i=1}^n$ から生成される変換行列

$$T = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \dots\ \mathbf{a}_n]$$

が正則である時，$\mathbb{C}^n$ における基底 (basis) と呼び，任意のベクトル $\mathbf{v}$ は新たな座標値 $\mathbf{v}'$ を持ち，連立一次方程式

$$T\mathbf{v}' = \mathbf{v}$$

を解くことで得られる。

問題 3.2

次のベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ の組

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix},\ \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix},\ \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix},\ \mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

が基底となっていることを確認せよ。また $\mathbf{v} = [1\ 2\ 3\ 4]^T$ をこの基底を用いて表現せよ。

3.3　線型空間と線型部分空間

既に見てきたように，全ての n 次元ベクトル $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ においてはスカラー倍，ベクトルの加減算が実行でき，結合則，交換則が成立する。このような集合を線型空間 (linear space) と呼ぶ。以下，集合 $\mathbb{K}$ を $\mathbb{C}$ もしくは $\mathbb{R}$ とし，線型空間の定義を厳密に述べる [1]。

定義 3.2 (線型空間)
定数 $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ に対して下記の性質を満足する時，集合 V を線型空間 (linear space), もしくはベクトル空間 (vector space) と呼ぶ。また，$\mathbb{K}$ をスカラー集合 (scalar set) と呼ぶ。

1. $V \neq \emptyset$(空集合でない)
2. 加算，スカラー倍に関して閉じている。即ち，全ての $\alpha \in \mathbb{K}$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ に対して，$\alpha\mathbf{a} \in V$, かつ $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in V$ が成り立つ。
3. ベクトルの加算に関して次の性質が成り立つ。
   3-1. 結合則，交換則が成立する。
   3-2. 零ベクトル $0 \in V$ が存在し，全ての $\mathbf{a} \in V$ に対して下記が成り立つ。
   $$0 + \mathbf{a} = \mathbf{a} + 0 = \mathbf{a}$$
   3-3. 任意の $\mathbf{a} \in V$ に対して逆ベクトル $-\mathbf{a} \in V$ が存在し，夏期が成り立つ。また逆ベクトルとの加算を減算 (subtraction) と呼ぶ。
   $$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = (-\mathbf{a}) + \mathbf{a} = 0$$
4. スカラー倍に関し，任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ に対して下記の性質が成り立つ。
   4-1. $(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$
   4-2. $\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$
   4-3. $(\alpha\beta)\mathbf{a} = \alpha(\beta\mathbf{a})$
   4-4. $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$

上記の定義に従えば，$\mathbb{C}^n$ はスカラー集合 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ の時に線型空間となり，$\mathbb{R}^n$ はスカラー集合が $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ の時に線型空間となる。

明らかに $\mathbb{C}^n \supset \mathbb{R}^n$ であるから，この場合，$\mathbb{R}^n$ は $\mathbb{C}^n$ の線型部分空間 (linear subspace) となる。

定義 3.3 (線型部分空間)
線型空間 V の部分集合 S が，スカラー集合 $\mathbb{K}$ 上で線型空間となっている時，S を V の線型部分集合 (linear subspace) と呼ぶ。

例えば，$\mathbb{R}^2$ は $\mathbb{R}^3$ の線型部分空間である。2 次元ベクトル $\mathbf{v} = [v_1\ v_2]^T$ に対して，$[v_1\ v_2\ 0]^T \in \mathbb{R}^3$ とすれば，$\mathbb{R}^3 \supset \mathbb{R}^2$ と考えられる。

他にも，次のような線型部分空間がある。

■固有空間　正方行列 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ の固有値 λ と固有ベクトル $\mathbf{x}$ に対して，

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}\} \cup \{\,0\,\}$$

を，行列 A の (固有値 λ に属する) 固有空間 (eigen space) と呼ぶ。

■ベクトルが張る空間　k 個のベクトル $\mathbf{v}_1$，$\mathbf{v}_2$，...，$\mathbf{v}_k \in \mathbb{C}^n$ の全ての線型結合 (linear connection)，即ち，スカラー倍の和 $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{v}_i$ の集合を

$$\mathrm{span}\{\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \ldots,\mathbf{v}_k\} = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{v}_i \;\middle|\; \alpha_i \in \mathbb{C}\ (i = 1, 2, \ldots, k) \right\}$$

と書き，ベクトルが張る空間 (spanning space) と呼ぶ。

例題 3.1
固有空間 $\mathcal{V}$，ベクトルが張る空間 $\mathrm{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ が線型空間であることを証明せよ。