第 4 章

正方行列の性質

4.1　正方行列の性質，基本変形，行列式，固有値・固有ベクトル

行数 m と列数 n が等しい行列を n 次正方行列 (square matrix) と呼ぶ。例えば下記は 2, 3, 4, 5 次正方行列の例である。

$$\begin{bmatrix} 3 & 2+\mathrm{i} \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 5+2\mathrm{i} & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 9 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 27 & 6 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 & 1 & 3 & 7 & 7 \\ 2 & 4 & 9 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 8 \\ 98 & 2 & 6 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 6 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

n 次正方行列の要素のうち，左上から右下への対角線に当たる部分の要素を対角要素 (diagonal element) と呼ぶ。対角要素が全て 1，それ以外の要素が全て 0 となる行列を単位行列 (Identity matrix) と呼び，大文字の I で表現する。次数 n を明記したい時は I_n と書く。0 要素を省略して書いたり，0 要素部分をまとめて零行列 O と書いたりすることもある。下記に単位行列と表現方法の例を挙げる。

$$I = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}$$

$$I = I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$I = I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & 1 \end{bmatrix}$$

正方行列の中には，同じサイズの正方行列との積が単位行列になるものがある。例えば

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

に対して，

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

という行列を右から掛けても，左から掛けても単位行列になる。

$$AC = CA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

このような関係にある正方行列 A, C は互いの逆行列 (inverse matrix) であると呼び，

$$A^{-1} = C,\ C^{-1} = A$$

と書く。

また，$A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ が正則行列であれば，AB も正則行列であり，その逆行列 $(AB)^{-1}$ は

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \tag{4.1}$$

となる。

逆行列を持つ正方行列を**正則** (行列)(normal matrix) と呼び，持たない行列を**非正則**と呼ぶ。例えば零行列は非正則である。それ以外にも

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 & 0 & 5 \\ -5 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

等は非正則である。

問題 4.1

(4.1) を証明せよ。

4.2　行列の基本変形と階数

正方行列が正則か非正則かを見分けるには，次のような行列の基本変形を行い，要素が全て零になる行が現れないかどうかで判断できる。

定義 4.1 (行列の基本変形)

正則行列 $P(i, j), Q(i; c), R(i, j : c)$ が下記のように与えられる時，これらを基本変形行列と呼び，左から乗じることで所定の行単位の変形が実行できる [1]。右から乗じると列単位の変形となる（→演習問題)

行の入れ替え $P(i,j)$　i 行目と j 行目 $(i \neq j)$ を入れ替える:

$$P(i,j) = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} & & & i\,\text{列目} & & & & j\,\text{列目} & & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ \\ \\ i\,\text{行目} \\ \\ \\ \\ j\,\text{行目} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} & \left[\begin{matrix} 1 & & & \vdots & & & & \vdots & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & & \vdots & & & \\ & & 1 & \vdots & & & & \vdots & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & & & \\ & & & \vdots & 1 & & & \vdots & & & \\ & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\ & & & \vdots & & & 1 & \vdots & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{matrix}\right] \end{array}$$

行の定数倍 $Q(i;c)$　i 行目の成分をすべて c 倍 $(c \neq 0)$ する：

$$Q(i;c) = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} & & & i\,\text{列目} & & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ \\ \\ i\,\text{行目} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} & \left[\begin{matrix} 1 & & & \vdots & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & 1 & \vdots & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & c & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{matrix}\right] \end{array}$$

行の定数倍と加算 $R(i,j;c)$　i 行目に j 行目の c 倍 $(c \neq 0)$ を加える：

$$R(i,j;c) = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} & & & & j\,\text{列目} & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ \\ i\,\text{行目} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} & \left[\begin{matrix} 1 & & & & \vdots & & \\ & \ddots & & & \vdots & & \\ \cdots & \cdots & 1 & \cdots & c & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{matrix}\right] \end{array}$$

定数 c が非ゼロである時，3 つの基本変形行列 $P(i,j)$, $Q(i;c)$, $R(i,j;c)$ は正則行列となる。

定理 4.1 (基本変形行列の逆行列)
$c \neq 0$ の時,

$$P(i,j)^{-1} = P(j,i) \tag{4.2}$$

$$Q(i;c)^{-1} = Q\left(i;\frac{1}{c}\right) \tag{4.3}$$

$$R(i,j;c)^{-1} = R(i,j;-c) \tag{4.4}$$

となる。

行の基本変形を行うことで，全ての要素が零にならない行数が決まる。これが行列の階数 (rank) であり，次のように書く。

$$\mathrm{rank}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 1,\ \mathrm{rank}\left(\begin{bmatrix} -5 & 0 & 5 \\ -5 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\right) = 2$$

なお，Scilab では階数を求める関数 rank があり，次のように用いる。

```
-->rank([1, 0; 0, 0])
 ans  =

    1.

-->rank([-5, 0, 5; -5, 0, 5; 1, 2, 0])
 ans  =

    2.
```

4.3　行列式と行列の固有値・固有ベクトル

行列式 (determinant) が定義でき，一番小さい 2 次行列の行列式を土台として，次のようにして計算できる。

定義 4.2 (正方行列の行列式)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

これを土台とし，第 (i, j) 余因子 Δ_{ij}(i 行目と j 列目を除いた $n-1$ 次正方行列) の記号を用いて，n 次正方行列の行列式は次のように再帰的に計算する。

$$\begin{aligned}&\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \left|\Delta_{ij}\right| \ (j = 1, 2, ..., n) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \left|\Delta_{ij}\right| \ (i = 1, 2, ..., n)\end{aligned}$$

例えば 3 次正方行列の場合，例えば $i = 1$ とした時には次のように計算できる。

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= \sum_{j=1}^{3} (-1)^{1+j} a_{1j} \left|\Delta_{1j}\right| \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}\end{aligned}$$

実際には行列積における次の性質を用いて，基本変形を経由して計算量を減らしておいてから行列式の計算を行う。

定理 4.2 (行列積の行列式)

任意の n 次正方行列 A, B に対しては

$$|AB| = |A||B|$$

である。

この行列式を用いて，正方行列の固有値 (eigenvalue) と固有ベクトル (eigenvector) が定義できる。

定義 4.3 (正方行列の固有方程式と固有値・固有ベクトル)

n 次正方行列 A において，未知数 λ を用いて

$$|A - \lambda I| = 0$$

という n 次代数方程式を A の固有方程式と呼び，この高々 n 個の解 $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ を A の固有値と呼ぶ。また，それぞれの固有値 λ に対して

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

を満足する零ではないベクトル $\mathbf{x}$ を，(固有値 λ の固有空間に属する) 固有ベクトルと呼ぶ。

n 次正方行列 A が正則行列であることを，階数，行列式，固有値を用いて表現すると次のような関係が成り立つ。

定理 4.3 (正則行列の性質)

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ が正則行列であることは，以下の 4 つの条件と同値である。

1. $\mathrm{rank}(A) = n$
2. $|A| \neq 0$
3. A の固有値 λ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ は全て $\lambda_i \neq 0$
4. $A = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \cdots\ \mathbf{a}_n]$ とすると，ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ は一次独立

問題 4.2

次の行列の固有多項式および固有値，固有ベクトルを求めよ。

1.
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

2.
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

演習問題

1. 行列 A が
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$
と与えられている時，次の計算を行え。
（a）$P(2, 3)A$
（b）$AP(2, 3)$
（c）$R(1, 2; -1)A$