第 10 章

線型常微分方程式とその解析解

本章では今まで学習してきた線型計算の手法を応用するための事例として，線型常微分方程式の初期値問題を取り上げる。常微分方程式の理論については専門の書籍に譲ることにするが，線型常微分方程式は行列とベクトルだけで構成され，解析解（真の解）を直接計算できるもので，今まで学んできた行列とベクトルの基本計算や連立一次方程式，固有値計算を組み合わせることで得ることができる。復習も兼ねて取り組んでほしい。

10.1 常微分方程式の初期値問題

例えば

$$y = \exp(-x^2) = e^{-x^2} \tag{10.1}$$

という一変数関数があったとする。ここで $x \in \mathbb{R}$ は独立変数である。この関数の導関数 $y' = dy/dx$ を求めると

$$\frac{dy}{dx} = -2x\exp(-x^2)$$

となる。右辺において $y = \exp(-x^2)$ という関係を使って y を当てはめると

$$\frac{dy}{dx} = -2xy \tag{10.2}$$

となる。このような関係式が成り立つ一変数関数を解 y とする方程式を常微分方程式（常微分は一変数関数の導関数を求める操作のこと）と呼ぶ。

従って，この場合，常微分方程式 (10.2) の解 (関数) は (10.1) となるが，正確に言うと，無数の解（一般解)

$$y = C\exp(-x^2) \ (C \in \mathbb{R}) \tag{10.3}$$

の一つ，即ち特殊解 ($C = 1$) に過ぎない。もし (10.1) が唯一の解であると主張したいのであれば，解が満足する追加の条件として，例えば

$$y(0) = 1 \tag{10.4}$$

というものが必要である。この時，$C\exp(0) = C = 1$ となり，積分定数 C は一つに固定される。

このタイプの追加条件を初期値と呼び，常微分方程式 (10.2) と初期条件 (10.4) をセットにした

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} &= -xy \\ y(0) &= 0 \end{cases} \tag{10.5}$$

を，常微分方程式の初期値問題と呼ぶ。

ちなみに，

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} &= g(x)y \\ y(0) &= y_0 \end{cases} \tag{10.6}$$

というタイプの問題の場合を変数分離系と呼び，y を左辺に移行して両辺を x で積分することにより，解析解

$$\log|y| = \int g(x)dx \Longrightarrow y(x) = y_0 \exp\left(\int_0^x g(t)dt\right)$$

を得る。

一般の常微分方程式の初期値問題は，n 次元ベクトル関数 $\mathbf{y}(x)$ に対して，$x, \mathbf{y}$ を引数として持つ多変数 n 次元ベクトル関数 $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ を用いて次のように定義される

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{y}}{dx} &= \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(x_0) &= \mathbf{y}_0 \end{cases} \tag{10.7}$$

常微分方程式の初期値問題が唯一の解 $\mathbf{y} = \mathbf{y}(x)$ を持つ条件は，ある定数 L(Lipschitz 定数と呼ぶ) が存在し，ある区間内の全ての x と，任意の n 次元ベクトル $\mathbf{z}, \mathbf{w}$ に対して

$$\|\mathbf{f}(x, \mathbf{z}) - \mathbf{f}(x, \mathbf{w})\| \le L\|\mathbf{z} - \mathbf{w}\| \tag{10.8}$$

が満足されることである。 これを Lipschitz 条件と呼ぶ。

問題 10.1

1 次元常微分方程式の初期値問題 (10.5) が Lipschitz 条件 (10.8) を満足することを示せ。また Lipschitz 定数 L を求めよ。

10.2　定係数線型常微分方程式の初期値問題

n 次実正方行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ が与えられているとき，n 次元常微分方程式の初期値問題 (10.7) の右辺が

$$\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) = A\mathbf{y}$$

で与えられているとき，斉次線型常微分方程式と呼ぶ。簡単のため，初期値を $x_0 = 0$ に限定して考える。

定義 10.1 (斉次線型常微分方程式の初期値問題)

n 次実正方行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ を用いて定義される常微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{y}}{dx} &= A\mathbf{y} \\ \mathbf{y}(0) &= \mathbf{y}_0 \end{cases} \tag{10.9}$$

を斉次線型常微分方程式の初期値問題と呼ぶ。

斉次線型常微分方程式の初期値問題 (10.9) の解 $\mathbf{y}(x)$ は次のように表現できる。行列指数関数

$$\exp(xA) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(xA)^i}{i!} \tag{10.10}$$

を用いると，解析解 $\mathbf{y}(x)$ は

$$\mathbf{y}(x) = \exp(xA)\mathbf{y}_0 \tag{10.11}$$

となる。

既に述べてきたように，一般の正方行列 A は対角化できる場合とできない場合がある。ここでは対角化できる場合のみを考え，実際に行列指数関数 (10.10) を計算する方法を考える。この時，相似変換行列 V によって行列 A は

$$V^{-1}AV = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

となる。ここで λ_i $(i = 1, 2, ..., n)$ は A の固有値，$V = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \cdots\ \mathbf{v}_n] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ は A の固有ベクトルである。

このような関係が成立する時，(10.9) の解 $\mathbf{y}(x)$ は次のように計算できる。

$$\mathbf{z} = V^{-1}\mathbf{y}$$

と置くと，$d\mathbf{z}/dx = V^{-1}d\mathbf{y}/dx$ となる。(10.9) の常微分方程式に右から V^{-1} を掛けて

$$V^{-1}\frac{d\mathbf{y}}{dx} = V^{-1}A\mathbf{y}$$

となるが，$\mathbf{y} = V\mathbf{z}$ かつ $d\mathbf{y}/dx = Vd\mathbf{z}/dx$ となることから，$\mathbf{y}$ を置き換えると

$$\frac{d\mathbf{z}}{dx} = V^{-1}AV\mathbf{z} = \Lambda\mathbf{z}$$

を得る。この時，初期値は $V^{-1}\mathbf{y}_0 = \mathbf{z}_0$ となる。従って，

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{z}}{dx} & = & \Lambda\mathbf{z} \\ \mathbf{z}(0) & = & \mathbf{z}_0 \end{cases} \tag{10.12}$$

を解けばよい。この場合，要素ごとに書き下してみると

$$\begin{cases} \frac{dz_i}{dx} & = & \lambda_i z_i \\ z_i(0) & = & z_i^{(0)} \end{cases} \quad (i = 1, 2, ..., n) \tag{10.13}$$

という変数分離系になるので，解は $z_i(x) = z_i^{(0)} \exp(\lambda_i x)$ となる。よって

$$\mathbf{y}(x) = V\mathbf{z}(x) = V \begin{bmatrix} z_1^{(0)} \exp(\lambda_1 x) \\ z_2^{(0)} \exp(\lambda_2 x) \\ \vdots \\ z_n^{(0)} \exp(\lambda_n x) \end{bmatrix}$$

を得る。

以上をまとめると，対角化可能な $V^{-1}AV = \Lambda$ を持つ斉次線型常微分方程式の初期値問題 (10.9) は次の手順で解析解 $\mathbf{y}(x)$ を得ることができる。

1. A の固有値，固有ベクトルを求め，Λ, V を得る。
2. 連立一次方程式 $V\mathbf{z}_0 = \mathbf{y}_0$ を $\mathbf{z}_0$ について解く。
3. $\mathbf{z}(x) := [z_1^{(0)} \exp(\lambda_1 x)\ z_2^{(0)} \exp(\lambda_2 x) \ldots z_n^{(0)} \exp(\lambda_n x)]^T$ を求める。
4. $\mathbf{y}(x) := V\mathbf{z}(x)$ を計算して求める。

では具体例で考えてみよう。次のような常微分方程式を考えてみる。

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{d}{dx}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 2y_1 + y_2 \\ y_1 + 2y_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} \right. \tag{10.14}$$

この場合，係数行列 A は

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

となる。

この時，A の固有値は $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$ となり，それぞれの固有値に対応する固有ベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ は，例えば

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

となる。この時，$V = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2]$ とおくと

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},\ V^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

となる。よって初期値は

$$\mathbf{z}_0 = V^{-1}\mathbf{y}_0 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

となる。

従って

$$\begin{bmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot \exp(3x) \\ 0 \cdot \exp(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(3x) \\ 0 \end{bmatrix}$$

となるので，

$$\mathbf{y}(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{bmatrix} = V\mathbf{z}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \exp(3x) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(3x) \\ \exp(3x) \end{bmatrix} \tag{10.15}$$

を得る。

問題 10.2

(10.14) の解が (10.15) であることを確認せよ。

10.3　斉次線型常微分方程式の解析解計算 Scilab スクリプト

前述した斉次線型常微分方程式の初期値問題 (10.9) の解析解計算を実行する Scilab スクリプト，exp_hom.sce を作ってみよう。ソースコードは長くなるので，ここでは抜粋して解説を行う。全体は付録 A.1 に掲載しておくので参照されたい。

10.4　非斉次線型常微分方程式の解析解

斉次線型常微分方程式に更に n 次元ベクトル関数 $\mathbf{g}(x)$ が加えられて

$$\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) = A\mathbf{y} + \mathbf{g}(x)$$

となるとき，非斉次線型常微分方程式と呼ぶ。

定義 10.2 (非斉次線型常微分方程式の初期値問題)
n 次実正方行列 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ を用いて定義される常微分方程式の初期値問題

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \frac{d\mathbf{y}}{dx} & = & A\mathbf{y} + \mathbf{g}(x) \\ \mathbf{y}(0) & = & \mathbf{y}_0 \end{array} \right. \tag{10.16}$$

を非斉次線型常微分方程式の初期値問題と呼ぶ。

非斉次線型常微分方程式の初期値問題 (10.16) の解 $\mathbf{y}(x)$ も，斉次の場合同様，行列指数関数を用いて次のように表現できる。

$$\mathbf{y}(x) = \exp(xA)\mathbf{y}_0 + \int_0^x \exp((x-\tau)A)\mathbf{g}(\tau)d\tau \tag{10.17}$$

となる。

従って，A が対角化できるようであれば，実際の計算は斉次の場合と同じようにでき，特に第一項 $\exp(xA)\mathbf{y}_0$ の計算は全く同じである。

第二項の積分計算は，

$$\mathbf{h}(x) = V^{-1}\mathbf{g}(x)$$

という $\mathbf{h}(x)$ を用いると

$$\Lambda\mathbf{h}(x) = (V^{-1}AV)V^{-1}\mathbf{g}(x)$$

という関係から

$$V\exp((x-\tau)\Lambda)\mathbf{h}(x) = \exp((x-\tau)A)\mathbf{g}(x)$$

を得る。この左辺を $\hat{\mathbf{h}}(\tau) = V\exp((x-\tau)\Lambda)\mathbf{h}(x) = V\exp((x-\tau)\Lambda)V^{-1}\mathbf{g}(x)$ と置くと，

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{h}}(\tau) &= V\exp((x-\tau)\Lambda)V^{-1}\mathbf{g}(x) \\
&= V\begin{bmatrix} \exp((x-\tau)\lambda_1) & & & \\ & \exp((x-\tau)\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \exp((x-\tau)\lambda_n) \end{bmatrix} V^{-1}\mathbf{g}(x) \\
&= \begin{bmatrix} \hat{h}_1(\tau) \\ \hat{h}_2(\tau) \\ \vdots \\ \hat{h}_n(\tau) \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

となるので，こうして生成した $\hat{\mathbf{h}}(\tau)$ を成分ごとに積分することで

$$
\begin{aligned}
\int_0^x \exp((x-\tau)A)\mathbf{g}(\tau)d\tau &= \int_0^x \hat{\mathbf{h}}(\tau)d\tau \\
&= \begin{bmatrix} \int_0^x \hat{h}_1(\tau)d\tau \\ \int_0^x \hat{h}_2(\tau)d\tau \\ \vdots \\ \int_0^x \hat{h}_n(\tau)d\tau \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

を得ることができる。

非斉次線型常微分方程式に対応した Scilab スクリプトは付録 A.1 に掲載しておく。

参考文献

[1] 齋藤正彦「線型代数入門」東京大学出版 (1966).

[2] 伊理正夫, 藤野和建「数値計算の常識」, 共立出版 (1985).

[3] A.N.Langvill, C.D.Meyer, Google's PageRank and Beyond, Princeton Univ. Press, 2006.

[4] Scilab, `http://www.scilab.org/`

[5] LAPaCK, `http://www.netlib.org/lapack/`

[6] Intel Math Kernel,